Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XV-a
Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Din ipoteză avem că $x+y+x\cdot y>a$, $\forall x,\ y\in(a;\infty)$. Alegem $x=y=x_n$, unde $x_n\to a$, $x_n>a, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Trecând la limită pentru $n\to\infty$ rezultă că $a+a+a^2\geq a$, deci $a^2+a\geq 0$, de unde $a\in(-\infty;-1]\cup[0;\infty)$. Pentru $a\geq 0$ se verifică imediat $x+y+x\cdot y>a$, $\forall x,\ y>a$. Deci $a\in[0;\infty)$ convine. Pentru $a=-1$, relaţia $x+y+x\cdot y>-1$, $\forall x,\ y>-1$ este echivalentă cu $(x+1)\cdot(y+1)>0$, adevărată pentru $x,\ y>-1$, deci şi acest caz convine. Fie acum $a<-1$. Atunci alegând $x>a$, $y=x_n\to a$, $x_n>a$ rezultă că $x+x_n+x\cdot x_n>a$, $\forall x>a$, de unde, prin trecere la limită pentru $n\to\infty$, rezultă $x\cdot(1+a)\geq 0$, $\forall x>a$ şi deoarece $1+a<0$, rezultă că $x\leq 0$, $\forall x>a$, fals. Aşadar, $a\in\{-1\}\cup[0;\infty)$.

b) Funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^{2015}+arctg\,x$ este bijectivă, iar f este funcţie injectivă, deci $g=h\circ f$ va fi o funcţie injectivă şi deoarece g are proprietatea lui Darboux rezultă că este strict monotonă, iar din ultimele două afirmaţii rezultă că g este funcţie continuă. Cum h este funcţie continuă şi bijectivă, rezultă că h^{-1} are aceleaşi proprietăţi, deci $f=h^{-1}\circ g$ este funcţie continuă, de unde rezultă că f admite primitive.

Problema 2.

Soluţie. Fie mulţimile $A=\{(x_1,x_2,...,x_q)\mid x_i\in\mathbb{Z},\ |x_i|\leq p,\ i=\overline{1,q}\}$ şi $B=\{(a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+...+a_{1q}\cdot x_q,\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+...+a_{2q}x_q,...,\ a_{p1}\cdot x_1+a_{p2}\cdot x_2+...+a_{pq}\cdot x_q)\}$, unde $(x_1,x_2,...,x_q)\in A$. Atunci $cardA=(2\cdot p+1)^q=(4\cdot p^2+4\cdot p+1)^p$, şi, deoarece $|a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+...+a_{iq}x_q|\leq|a_{i1}|\cdot|x_1|+|a_{i2}|\cdot|x_2|+...+|a_{iq}|\cdot|x_q|\leq p\cdot q$, rezultă că numărul de elemente al multimii B este cel mult egal cu $(2\cdot p\cdot q+1)^p=(4\cdot p^2+1)^p<cardA$. Conform principiului cutiei, rezultă că există în mulţimea A două elemente distincte, $(x_1^{'},\ x_2^{'},...,x_q^{'})$, respectiv $(x_1^{''},\ x_2^{''},...,x_q^{''})$, astfel încât $a_{i1}\cdot x_1^{'}+a_{i2}\cdot x_2^{'}+...+a_{iq}\cdot x_q^{'}=a_{i1}\cdot x_1^{''}+a_{i2}\cdot x_2^{''}+...+a_{iq}\cdot x_q^{''}$, $i=\overline{1,p}$. Notând $x_j=x_j^{'}-x_j^{''}$, $j=\overline{1,q}$, vom avea $a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+...+a_{iq}\cdot x_q=0$, $i=\overline{1,p}$, adică $(x_1,x_2,...,x_p)$ este o soluţie nebanală a sistemului cu toate componentele întregi. Mai mult, $|x_j|\leq|x_i^{'}|+|x_j^{'}|\leq p+p=q$, $\forall j\in\{1,2,...,q\}$, de unde rezultă concluzia problemei.

Problema 3

Soluţie. a) Prin inducţie se obţin succesiv relaţiile :
$f(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n), \forall x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, apoi pentru

$x_1 = x_2 = ... = x_n = x$, rezultă că $f(n\cdot x) = n\cdot f(x),\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Pentru $x = y = 0$ se obține $f(0) = 0$, iar apoi pentru $y = -x$ se obține $0 = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x), \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că f este funcție impară. Notând $\alpha = f(1)$ rezultă inductiv că $f(n) = \alpha\cdot n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, de unde , ținând cont de imparitatea funcției f , rezultă că $f(k) = \alpha\cdot k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$. Apoi, pentru $n\in\mathbb{N}^*$, din $\alpha = f(1) = f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$,rezultă că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha\cdot\frac{1}{n}$, deci $f\left(\frac{m}{n}\right) = m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha\cdot\frac{m}{n},\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$, iar apoi , din imparitatea functiei f rezultă că $f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = \alpha\cdot\left(-\frac{m}{n}\right),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$. Aşadar , $f(q) = \alpha\cdot q,\ \forall q\in\mathbb{Q}$. Demonstrăm că $f(x) = \alpha\cdot x, \forall x\in\mathbb{R}$, iar $\alpha\in\mathbb{R}^*$, datorită condiției ii) .

Fie $[a;b]$ interval închis şi mărginit ales arbitrar. Din ipoteză avem $f([a;b]) = [m;M],\ m,M\in\mathbb{R},\ m\leq M$, iar $f([a;b]) = f((a;b))\cup\{f(a)\ ;\ f(b)\} = [m;M]$, de unde, ținând cont de faptul că $f((a;b))$ este interval deschis, rezultă că $f(a) = m,\ f(b) = M$ sau $f(a) = M$, $f(b) = m$. Vom demonstra că funcția f este monotonă.

Presupunem prin reducere la absurd că există $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2 < x_3$ astfel încât $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ sau $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Alegem $a = x_1$, $b = x_3$ şi va rezulta că $f(a) < f(x_2) > f(b)$, sau $f(a) > f(x_2) < f(b)$. În ambele situații rezultă că $f(x_2)\notin[m;M]$, contradicție. Aşadar f este functie monotonă. Presupunem că f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$. Fie $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, arbitrar fixat. Există şirurile de numere raționale $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $y_n < x_0 < z_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ y_n\to x_0,\ z_n\to x_0$. Atunci $f(y_n)\leq f(x_0)\leq f(z_n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, de unde $\alpha\cdot y_n\leq f(x_0)\leq\alpha\cdot z_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, iar prin trecere la limită pentru $n\to\infty$ rezultă că $f(x_0) = \alpha\cdot x_0$. Aşadar $f(x) = \alpha\cdot x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}^*$

b) Pentru $y = 0$ în relația din ipoteză avem $2\cdot g\left(\frac{x}{2}\right) = g(x) + g(0), \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $2\cdot\left[g\left(\frac{x}{2}\right) - g(0)\right] = g(x) - g(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Notând $h(x) = g(x) - g(0),\ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, obținem $2\cdot h\left(\frac{x}{2}\right) = h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că

$$h(x+y) = 2\cdot h\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\cdot\left[g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(0)\right] = g(x) + g(y) - 2\cdot g(0) = h(x) + h(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

deci, la fel ca la punctul precedent , va rezulta că $h(q) = \alpha\cdot q,\ \forall q\in\mathbb{Q},\ \alpha\in\mathbb{R}$. Conform ipotezei, h admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivă a funcției h şi $y_0\in\mathbb{R}$ arbitrar fixat. Atunci, prin integrarea relației $h(x+y_0) = h(x) + h(y_0), \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că $H(x+y_0) = H(x) + x\cdot h(y_0) + c(y_0),\ \forall x\in\mathbb{R}$ şi întrucât y_0 a fost considerat arbitrar, rezultă că $H(x+y) = H(x) + x\cdot h(y) + c(y),\ \forall x\ ,\ y\in\mathbb{R}$.
Pentru $x = 0$ rezultă că $H(y) = c(y), \forall y\in\mathbb{R}$, deci $H(x+y) = H(x) + x\cdot h(y) + H(y),\ \forall x\ ,\ y\in\mathbb{R}$.
Pentru $x = 1$ în ultima relație , rezultă că $H(1+y) = H(1) + h(y) + H(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$, de unde $h(y) = H(1+y) - H(y) - H(1), \forall y\in\mathbb{R}$, relație din care rezultă că funcția h este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci continuă pe $\mathbb{R}$, iar din $h(q) = \alpha\cdot q,\ \forall q\in\mathbb{Q}$ şi din motive de densitate a mulțimii $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ rezultă că $h(x) = \alpha\cdot x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. În final avem $g(x) = \alpha\cdot x + g(0) = \alpha\cdot x + \beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.