Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie 2015

Clasa a XIa

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

a) $A\cdot B = B\cdot A = O_3$ ....2 puncte

b) $C^n = (a\cdot A + b\cdot B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a\cdot A)^{n-k}\cdot(b\cdot B)^k$

Cum $A\cdot B = B\cdot A = O_3$ rezultă că $C^n = a^n\cdot A^n + b^n\cdot B^n$ **,** ....1 punct

$B^n = 2^n\cdot 3^{n-1}\cdot U_3$, unde $U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ...1 punct

$A^n = 2^n\cdot 3^{n-1}\cdot\left((-1)^{n-1}\cdot U_3 + (-1)^n\cdot 3^n\cdot I_3\right)$..2 puncte

$C^n = 2^n\cdot 3^{n-1}\cdot\left(U_3 + (-1)^{n-1}\cdot U_3 + (-1)^n\cdot 3^n\cdot I_3\right)$..1 punct

Problema 2

a) Obs că pt $z_1 = 0$ atunci $|z_1 + z_2| = |z_1\cdot z_2|$ devine $|z_2| = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$, deci în acest caz afirmaţia din concluzie este adevărată.. ....1 punct

Dacă $z_1 \neq 0$ şi $z_2 \neq 0$ atunci avem $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} \geq 1$ ....1 punct

Presupunând prin absurd că $|z_1| > 2, |z_2| > 2$ se obţine $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} < 1$ şi finalizare.....................1 punct

b) Din a) şi $z_1 \neq z_2 \Rightarrow z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ deci $|z_1 + z_2| = |z_1\cdot z_2| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right| = 1$ ....1 punct

$z_k = r_k(\cos t_k + i\sin t_k), k = \overline{1,2}$ atunci $\left|\frac{\cos(-t_1) + i\sin(t_1)}{r_1} + \frac{\cos(-t_2) + i\sin(t_2)}{r_2}\right| = 1$..........1 punct

$|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ se deduce relaţia: $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2\cos(t_1 - t_2)}{r_1 r_2} = 1$. ....1 punct

$\cos(t_1 - t_2) = 0$: $r_1 = r_2 = \sqrt{2}, t_1 = \pi, t_2 = \frac{\pi}{2}$, $z_1 = -\sqrt{2}, z_2 = i\cdot\sqrt{2}$ (sau alte exemple)..1 punct

Problema 3

a) $x_n \in (0,2), (\forall) n \in \mathbb{N}$. ....1 punct

$f:(0,2) \to (0,2),\ f(x) = \sqrt{4-2\cdot x}$, $x_{n+1} = f(x_n), (\forall) n \in \mathbb{N}$

$x_{2n+2} = (f \circ f)(x_{2n}), (\forall) n \in \mathbb{N}$ şi $x_{2n+1} = (f \circ f)(x_{2n-1}), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Din f strict descrescătoare, deducem că $f \circ f$ este strict crescătoare....................................... 1 punct

$x_0 > x_2 > \sqrt{5}-1 \quad \Rightarrow (f \circ f)(x_0) > (f \circ f)(x_2) > (f \circ f)\left(\sqrt{5}-1\right) \quad \Leftrightarrow x_2 > x_4 > \sqrt{5}-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f \circ f)(x_2) > (f \circ f)(x_4) > (f \circ f)\left(\sqrt{5}-1\right) \Leftrightarrow x_4 > x_6 > \sqrt{5}-1$

Prin inducţie se demonstrează că $x_{2n} > x_{2n+2} > \sqrt{5}-1, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

Analog, din $x_1 < x_3 < \sqrt{5}-1$, $f \circ f$ strict crescătoare şi $x_{2n+1} = (f \circ f)(x_{2n-1}), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ se demonstrează prin inducţie că $x_{2n-1} < x_{2n+1} < \sqrt{5}-1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$...1 punct

b) $0 < x_{2n-1} < \sqrt{5}-1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ şi $(x_{2n-1})_n$ strict crescător, deci există $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} \in \left(0; \sqrt{5}-1\right]$.

$\sqrt{5}-1 < x_{2n}, (\forall) n \in \mathbb{N}$ şi $(x_{2n})_n$ strict descrescător există $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} \in \left[\sqrt{5}-1; 2\right)$.......................1 punct

$a = \sqrt{4-2b}$ şi $b = \sqrt{4-2a}$, $a - \sqrt{4\ b =}\ \sqrt{2\ } -$

$$a - b = \frac{4-2b-(4-2a)}{\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a}} \Leftrightarrow a-b = \frac{2(a-b)}{\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a}} \Leftrightarrow$$

$a = b$ sau $\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a} = 2$ ....1 punct

Dar, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$, $(x_{2n-1})_n$ strict crescător şi $x_1 = 1$, deci $a > 1$

$b = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$, $(x_{2n})_n$ strict descrescător şi $x_{2n} > \sqrt{5}-1, (\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow b \geq \sqrt{5}-1$

Din (1) şi (2) avem că $a+b > 1+\sqrt{5}-1 \Rightarrow a+b > \sqrt{5} > 2$ ....1 punct

Cum $a = \sqrt{4-2b}$ şi $b = \sqrt{4-2a}$ rezultă că $\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a} > 2$, adică relaţia $\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a} = 2$ este imposibilă.

Rămâne că $a = b$ şi din ecuaţia $a = \sqrt{4-2a}$ deducem că $a = \sqrt{5}-1$.

în concluzie şirul $(x_n)_n$ este convergent şi are limita $\sqrt{5}-1$ ....1 punct