Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie 2015

Clasa a VIII -a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Deoarece $\left|(3\cdot x-2\cdot y)^2-4\cdot x-2\cdot y+14\right|\geq 0$ și $(7-2\cdot x-y)^2\geq 0$ pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$ obținem $14-4\cdot x-2\cdot y\geq 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$ Astfel $(3\cdot x-2\cdot y)^2-4\cdot x-2\cdot y+14\geq 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, deci $\left|(3\cdot x-2\cdot y)^2-4\cdot x-2\cdot y+14\right|=(3\cdot x-2\cdot y)^2-4\cdot x-2\cdot y+14$.

Înlocuind în relația dată vom avea că $(3\cdot x-2\cdot y)^2+(7-2\cdot x-y)^2=0$, de unde rezultă $3\cdot x-2\cdot y=0$ și $7-2\cdot x-y=0$. Din a doua relație substituim $y=7-2\cdot x$ și înlocuind în prima relație obținem $3\cdot x-2\cdot(7-2\cdot x)=0$, adică $x=2$ și $y=3$.

b) Ecuația poate fi scrisă sub forma $16\cdot y^2-x^2=3\cdot y-4$. Descompunem membrul stâng al ecuației și obținem $(4\cdot y-x)\cdot(4\cdot y+x)=3\cdot y-4$.

Dacă $y\geq 2$, cum $x\in\mathbb{N}$, avem că $4\cdot y+x>0,\ 3\cdot y-4>0$ și $(4\cdot y+x)/(3\cdot y-4)$ de unde rezultă că $4\cdot y+x\leq 3\cdot y-4$. Obținem astfel $y+x\leq -4$, relație evident falsă pentru x și y numere naturale. Prin urmare $y\geq 2$ nu este soluție a ecuației, deci $y\in\{0;1\}$.

Dacă $y=0$, înlocuind în ecuația inițială obținem $x^2=4$ și cum $x\in\mathbb{N}$ rezultă $x=2$.

Dacă $y=1$, înlocuind în ecuația inițială obținem $x^2=17$ și cum $x\in\mathbb{N}$, iar 17 nu este pătrat perfect rezultă că ecuația nu are soluții în acest caz .

Deci, soluția ecuației este $S=\{(2;0)\}$.

Problema 2.

Soluţie. a) Pentru a demonstra că $FP\parallel QE$ vom arăta că $\sphericalangle PFE\equiv\sphericalangle FEQ$ (unghiuri alterne interne determinate de dreptele FP,QE cu secanta FE).

Unghiurile $\sphericalangle AND,\ \sphericalangle DPC,\ \sphericalangle CMB$ sunt drepte deoarece sunt înscrise în semicercuri. Cum unghiurile $\sphericalangle CMQ,\ \sphericalangle CMB$ sunt suplementare rezultă că și unghiul $\sphericalangle CMQ$ este drept . Astfel patrulaterul $NPMQ$ are 3 unghiuri drepte, prin urmare este dreptunghi. De aici rezultă că $NP\parallel QM$. Dar N,D,P coliniare și Q,M,B coliniare implică $DP\parallel MB$ (1). Din $ABCD$ trapez avem că $BA\parallel DC$ (2).

Obținem $\sphericalangle PDC\equiv\sphericalangle QBA$ deoarece sunt unghiuri ascuțite și au laturile paralele (relațiile (1) și (2)). Notăm $m(\sphericalangle PDC)=m(\sphericalangle QBA)=\alpha$.

În triunghiul dreptunghic $\Delta DPC,\ m(\sphericalangle DPC)=90^\circ$, $[PF]$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei, prin urmare $PF=\dfrac{DC}{2}=DF$, adică triunghiul ΔPFD este isoscel, de unde rezultă că $m(\sphericalangle DPF)=m(\sphericalangle FPD)=\alpha$.

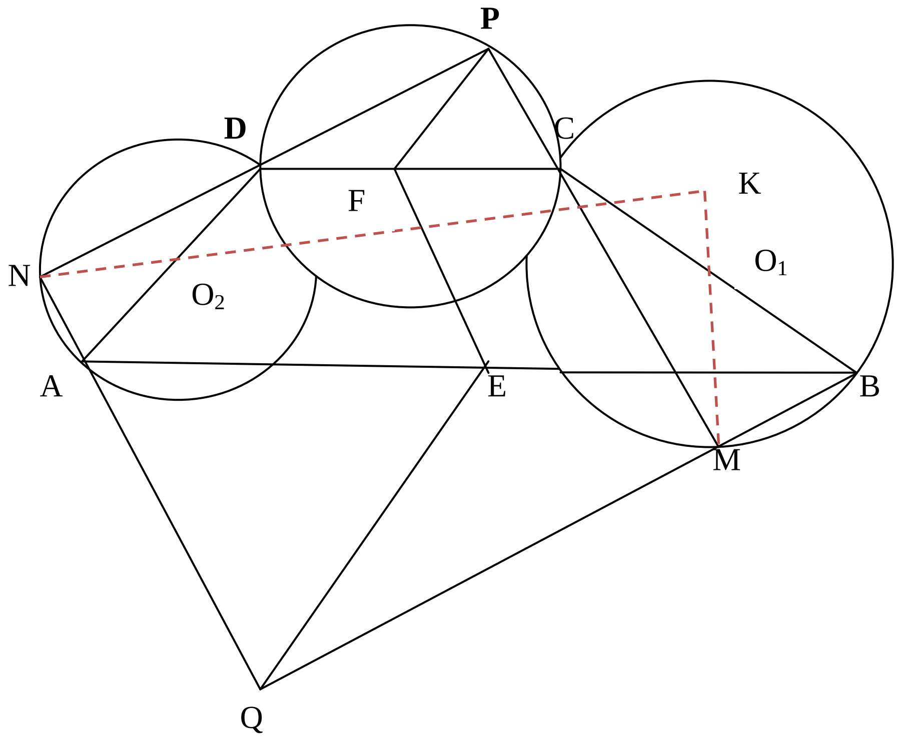
Dar unghiul $\sphericalangle PFC$ este unghi exterior triunghiului ΔPFD și de aceea
$m(\sphericalangle PFC)=m(\sphericalangle DPF)+m(\sphericalangle FPD)=2\cdot\alpha$ (3)

Din $NPMQ$ dreptunghi rezultă că unghiul $\sphericalangle NQB$ este drept, deci triunghiul ΔAQB este dreptunghic cu mediana $[QE]$ corespunzătoare ipotenuzei. Astfel obținem $QE=\frac{AB}{2}=EB$, de unde rezultă că triunghiul ΔQEB este isoscel, prin urmare avem
$m(\sphericalangle EQB)=m(\sphericalangle EBQ)=\alpha$.

Dar unghiul $\sphericalangle AEQ$ este unghi exterior triunghiului ΔEQB și de aceea
$m(\sphericalangle AEQ)=m(\sphericalangle EQB)+m(\sphericalangle EBQ)=2\cdot\alpha$ (4)

Dreptele paralele $AB \| CD$ tăiate de secanta FE determină unghiurile alterne interne congruente $\sphericalangle AEF\equiv\sphericalangle CFE$ (5). Dar din relațiile (3) și (4) obținem că $\sphericalangle AEQ\equiv\sphericalangle CFP$ (6).

Din relațiile (5) și (6) , prin însumare de unghiuri cu măsuri egale rezultă că
$\sphericalangle QEF\equiv\sphericalangle PFE$, ceea ce implică $FP \| QE$.



b) Avem $m(\sphericalangle ADN)=180^\circ-m(\sphericalangle PDC)-m(\sphericalangle ADC)=180^\circ-\alpha-m(\sphericalangle ADC)$.

Cum ΔO_2NA este isoscel ($[AO_2]$, $[NO_2]$ sunt raze ale aceluiași cerc) rezultă că

$m(\sphericalangle ANO_2)=m(O_2AN)=90^\circ-m(\sphericalangle ADN)=90^\circ-\left(180^\circ-\alpha-m(\sphericalangle ADC)\right)=$

$=\alpha+m(\sphericalangle ADC)-90^\circ$

Deoarece ΔO_1MB este isoscel ($[MO_1]$, $[BO_1]$ sunt raze ale aceluiași cerc) rezultă că
$m(\sphericalangle O_1MB)=m(O_1BM)=m(\sphericalangle CBA)+m(\sphericalangle ABM)=m(\sphericalangle CBA)+\alpha$

Dar unghiurile $\sphericalangle QMC$, $\sphericalangle BMC$ sunt suplementare, deci avem

$m(\sphericalangle QMO_1)=180^\circ-m(BMO_1)=180^\circ-\left(\alpha+m(\sphericalangle ABC)\right)$.

În patrulaterul convex $MKNQ$ avem $m(\sphericalangle NQM)=90^\circ$ și obținem

$360^\circ=\left(\alpha+m(\sphericalangle ADC)-90^\circ\right)+90^\circ+\left(180^\circ-\alpha-m(\sphericalangle ABC)\right)+m(\sphericalangle MKN)$, de unde $m(\sphericalangle MKN)=180^\circ - m(\sphericalangle ADC)+m(\sphericalangle ABC)$.

Cum unghiurile $\sphericalangle ADC, \sphericalangle DAB$ sunt alăturate în trapez rezultă că sunt suplementare, deci $m(\sphericalangle DAB)=180^\circ - m(\sphericalangle ADC)$ **.** Înlocuind în relația de mai sus obținem $m(\sphericalangle MKN)=m(\sphericalangle DAB)+m(\sphericalangle ABC)=const.$

Punctele O_1, O_2 fiind fixe și $m(\sphericalangle O_1KO_2)=const.$, punctul K descrie arcul de cerc capabil de unghiul cu măsura egală cu $m(\sphericalangle DAB)+m(\sphericalangle ABC)$.

Problema 3

Soluţie.

Se arată mai întâi că A este finită. Într-adevăr, dacă $b=\min A$ și $a\in A\setminus\{b\}$, atunci din $(a-b)|[a,b]$ deducem $(a-b)|a\cdot b$. Cum $(a-b)|(a-b)$ rezultă $(a-b)|a\cdot b-b\cdot(a-b)$, adică $(a-b)|b^2$, deci $a\le b+b^2$. Cum $a\in A$ a fost arbitrar ales rezultă de aici că A este finită.

Fie $a=\max A$ și $b=\min A$. Dacă $d=(a,b)$, atunci $b=d\cdot x$, $a=d\cdot y$, cu $x,y\in\mathbb{N}^*$, $(x,y)=1$. Atunci $\dfrac{[a,b]}{a-b}=\dfrac{x\cdot y}{y-x}\in\mathbb{N}^*$. Cum $x,y,x-y$ sunt două câte două prime între ele, deducem $y-x=1$, deci $y=x+1$ astfel că $a=d\cdot(x+1)$, $b=d\cdot x$. Atunci $\dfrac{[a,b]}{a-b}=x\cdot(x+1)\in A$, deci $b\le x\cdot(x+1)\le a$ de unde rezultă $d\in\{x,x+1\}$.

Cazul I. $d=x$. Avem $a=x\cdot(x+1)$, $b=x^2$. Vom arăta că A nu mai are și alte elemente în afară de a și b.

Presupunând contrariul, fie $c=\min(A\setminus\{b\})$. Analog ca mai sus se arată că există $d',z\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a=d'\cdot(z+1)$, $c=d'\cdot z$. Atunci $\dfrac{[a,c]}{a-c}=z\cdot(z+1)\in A$. Se observă că $z\cdot(z+1)\ne x^2=b$, deci $c\le z\cdot(z+1)\le a$ de unde se obține $d'\in\{z,z+1\}$.

Dacă $d'=z$, atunci $a=z\cdot(z+1)$ și cum $a=x\cdot(x+1)$ ar rezulta că $x=z$, contradicție deoarece s-ar obține $b=c$.

Dacă $d'=z+1$, atunci $a=(z+1)^2$ și $a=x\cdot(x+1)$, imposibil.

În consecință mulțimea A are 2 elemente.

Cazul II. $d=x+1$. Avem $a=(x+1)^2$, $b=x\cdot(x+1)$. Vom arăta că A nu mai are și alte elemente în afară de a și b. Analog ca mai sus, fie $c=\min(A\setminus\{b\})$. În același mod se obține $a=d'\cdot(z+1)$, $c=d'\cdot z$, cu $d',z\in\mathbb{N}^*$. Atunci $\dfrac{[a,c]}{a-c}=z\cdot(z+1)\in A$. Dacă $z\cdot(z+1)=b$, atunci $x\cdot(x+1)=z\cdot(z+1)$ și folosind faptul că x,z sunt pozitive s-ar obține $x=z$. Atunci $a=d'\cdot(x+1)$ și $a=(x+1)^2$ implică $d'=x+1$ adică $b=c$, imposibil. Așadar $c\le z\cdot(z+1)\le a$ de unde se obține $d'\in\{z,z+1\}$. Cu același raționament ca mai sus se ajunge la contradicție, deci A are 2 elemente.