Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie 2015

Clasa a X-a

SOLUŢII

Problema 1.
Soluţie.

a) Avem evident relaţiile:

$$\overrightarrow{PE}=\frac{BE}{AB}\cdot\overrightarrow{PA}+\frac{AE}{AB}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{BE\cdot AP}{AB}\cdot\frac{\overrightarrow{PA}}{AP}+\frac{AE\cdot BP}{AB}\cdot\frac{\overrightarrow{PB}}{BP}=\frac{BE\cdot AP}{AB}\cdot\vec{u}+\frac{AE\cdot BP}{AB}\cdot\vec{v}\ ;$$

$$\overrightarrow{PF}=\frac{CF}{AC}\cdot\overrightarrow{PA}+\frac{AF}{AC}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{CF\cdot AP}{AC}\cdot\frac{\overrightarrow{PA}}{AP}+\frac{AF\cdot CP}{AC}\cdot\frac{\overrightarrow{PC}}{CP}=\frac{CF\cdot AP}{AC}\cdot\vec{u}-\frac{AF\cdot CP}{AC}\cdot\vec{v}$$

b) Vectorii $\overrightarrow{PE}$ şi $\overrightarrow{PF}$ sunt ortogonali deoarece subântind un diametru deci $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=0$ şi cum şi versorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt ortogonali vom avea : $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=0=\frac{BE\cdot AP}{AB}\cdot\frac{CF\cdot AP}{AC}-\frac{AE\cdot BP}{AB}\cdot\frac{AF\cdot CP}{AC}$ de unde rezultă imediat concluzia.

Problema 2.
a)Soluţie.
Se observă că $x=1$ este soluţie.

Avem $(x+1)^9-2^9=x^{10}-1$ şi cum

$x^{10}-1=\left(x^5-1\right)\cdot\left(x^5+1\right)$ şi $x^5+1=(x+1)\cdot\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)\Rightarrow 2^9\,\vdots\,x+1$ (1)

Dar $(x+1)^9=M_x+1$ şi din ecuaţie obţinem $(x+1)^9-1-x^{10}=510\Rightarrow 510\,\vdots\,x$

Se observă că $x\le 0$ nu convine deoarece $(x+1)^9=x^{10}+511\Rightarrow x+1>0$.

Deci $x\ge 1$. Evident $510=2\cdot 3\cdot 5\cdot 17$ şi din $(1)\Rightarrow x\in\{1,3.7,15,31,63,127,255,511\}\cap D_{510}=\{1,3,15\}$

Pentru $x=3\Rightarrow 4^9-3^{10}=5^{11}$, $u.c.(4^9-3^{10})=5\neq 1$

Pentru $x=15\Rightarrow 16^9-15^{10}=511$ şi avem relaţiile $16^9=M_{11}+5^9=M_{11}+5\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=M_{11}+9$ unde am folosit $25\equiv 3(\mathrm{mod}\,11)$ iar cf. teoremei lui Fermat $15^{10}-1\,\vdots\,11\Rightarrow 15^{10}=M_{11}+1$ şi $511=M_{11}+5$ deci nici în acest caz nu poate avea loc egalitatea.

b)Soluţie.

Avem relaţiile : $\sum \frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2\cdot a}\cdot\sum\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)=\frac{1}{2\cdot a}\cdot\left(\sum\frac{1}{a+x}+\sum\frac{1}{a-x}\right)\geq$

$$\geq\frac{1}{2\cdot a}\cdot\left(\frac{9}{3\cdot a+\sum x}+\frac{9}{3\cdot a-\sum x}\right)=\frac{1}{2\cdot a}\cdot\left(\frac{9}{3\cdot a+1}+\frac{9}{3\cdot a-1}\right)=\frac{27}{9\cdot a^2-1}$$

Pentru inegalitatea a doua avem: $\sum\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2\cdot a}\cdot\sum\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)=$

$$=\frac{1}{2\cdot a}\cdot\left(\frac{1}{a+1}\cdot\sum\frac{a+1}{a+x}+\frac{1}{a-1}\cdot\sum\frac{a-1}{a-x}\right)\leq\frac{1}{2\cdot a}\cdot\left(\frac{1}{a+1}\cdot\sum\frac{a+1-x}{a}+\frac{1}{a-1}\cdot\sum\frac{a-1}{a-x}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\cdot a}\cdot\left(\frac{1}{a+1}\cdot\frac{3\cdot a+2}{a}+\frac{1}{a-1}\cdot\sum\frac{a-1+x}{a}\right)=\frac{1}{2\cdot a}\left(\frac{3\cdot a+2}{a\cdot(a+1)}+\frac{1}{a-1}\cdot\sum\frac{a-1+x}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot a}\left(\frac{3\cdot a+2}{a\cdot(a+1)}+\frac{1}{a-1}\cdot\frac{3\cdot a-2}{a}\right)=\frac{1}{2\cdot a^2}\left(\frac{3\cdot a+2}{(a+1)}+\frac{3\cdot a-2}{a-1}\right)=\frac{3a^2-2}{a^2\cdot(a^2-1)}.$$

Problema 3.
Soluţie.

Cerinţa din enunţ impune ca 10^{2015} să dividă $(n+1)(n+2)...(n+10)$. Obţinem condiţia ca 5^{2015} să dividă $(n+1)(n+2)...(n+10)$.

Dar printre numerele $n+1, n+2, ..., n+10$ unul se divide doar cu 5 iar celălalt multiplu de 5 trebuie să se dividă cu 5^{2014}, de unde $n+10\geq 5^{2014}\Rightarrow n\geq 5^{2014}-10$.

Arătăm că $n=5^{2014}-10$ îndeplinește cerinţa.

Calculăm exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a lui $(5^{2014}-10)!$ iar acesta este:

$$a=\left[\frac{5^{2014}-10}{2}\right]+\left[\frac{5^{2014}-10}{4}\right]+...$$

Aflăm și exponentul lui 5 în descompunerea lui $5^{2014}!$ iar acesta este

$$b=5^{2013}+5^{2012}+...+5+1=\frac{5^{2014}-1}{4}.$$

Observăm că $a>\frac{5^{2014}-1}{2}$ deoarece $\frac{5^{2014}-10}{2}>\frac{5^{2014}-1}{4}$.

Deci în concluzie numărul $5^{2014}-10$ convine căci se realizează cele 2015 zerouri cerute de problemă.