Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Filiala Galaţi**

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri” **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie 2015

Clasa a XI-a

SOLUŢII

Problema 1.

a) Soluţie $A\cdot B=B\cdot A=O_3$.

$C^n=\left(a\cdot A+b\cdot B\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(a\cdot A\right)^{n-k}\cdot\left(b\cdot B\right)^k$. Cum $A\cdot B=B\cdot A=O_3$ rezultă că

$C^n=a^n\cdot A^n+b^n\cdot B^n$

Matricea B se mai poate scrie $B=2\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=2\cdot U_3$, unde $U_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Cum $U_3^n=3^{n-1}\cdot U_3$ rezultă că $B^n=2^n\cdot 3^{n-1}\cdot U_3$.

Matricea A se scrie $A=B-6\cdot I_3=2\cdot U_3-6\cdot I_3=2\cdot\left(U_3-3\cdot I_3\right)$

$A^n=2^n\cdot\left(U_3-3\cdot I_3\right)^n$

$\left(U_3-3\cdot I_3\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kU_3^{n-k}\cdot\left(-3I_3\right)^k=U_3^n-3\cdot C_n^1 3^{n-2}\cdot U_3+3^2\cdot C_n^1 3^{n-3}\cdot U_3-...+\left(-1\right)^{n-1}3^{n-1}\cdot C_n^{n-1}U_3+$

$+\left(-1\right)^n 3^n\cdot C_n^n I_3=3^{n-1}\cdot U_3\cdot\left(C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+\left(-1\right)^{n-1}C_n^{n-1}\right)+\left(-1\right)^n\cdot 3^n C_n^n I_3=$

$=3^{n-1}\cdot U_3\cdot\left(-1\right)^{n-1}\cdot C_n^n+\left(-1\right)^n\cdot 3^n\cdot C_n^n\cdot I_3=3^{n-1}\cdot U_3\cdot\left(-1\right)^{n-1}+\left(-1\right)^n\cdot 3^n\cdot I_3$. Deci,

$A^n=2^n\cdot 3^{n-1}\cdot\left(\left(-1\right)^{n-1}\cdot U_3+\left(-1\right)^n\cdot 3\cdot I_3\right)$. În concluzie,

$C^n=2^n\cdot 3^{n-1}\cdot\left(b^n\cdot U_3+\left(-1\right)^{n-1}\cdot a^n\cdot U_3+a^n\cdot\left(-1\right)^n\cdot 3\cdot I_3\right)$.

Problema 2

a) Avem $\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|=\left|z_1\cdot z_2\right|=\left|z_1+z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ (1)

Dacă $z_1=0$ atunci $\left|z_1+z_2\right|=\left|z_1\cdot z_2\right|$ devine $\left|z_2\right|=0\Leftrightarrow z_2=0$, deci în acest caz afirmaţia din concluzie este adevărată. Dacă $z_2=0$, se procedează analog. Dacă $z_1\ne 0$ şi $z_2\ne 0$ atunci relaţia (1) $\Leftrightarrow\frac{1}{\left|z_1\right|}+\frac{1}{\left|z_2\right|}\ge 1$ (2). Presupunând prin absurd că $\left|z_1\right|>2,\left|z_2\right|>2$ se obţine $\frac{1}{\left|z_1\right|}+\frac{1}{\left|z_2\right|}<1$ în contradicţie cu (1). Deci şi în acest caz avem $\left|z_1\right|\le 2$ sau $\left|z_2\right|\le 2$.

b) Din a) şi $z_1\ne z_2\Rightarrow z_1\ne 0, z_2\ne 0$ deci $\left|z_1+z_2\right|=\left|z_1\cdot z_2\right|\Leftrightarrow\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right|=1$ (3).

Dacă $z_k=r_k\left(\cos t_k+i\sin t_k\right), k=\overline{1,2}$ atunci (3) devine

$\left|\frac{\cos\left(-t_1\right)+i\sin\left(t_1\right)}{r_1}+\frac{\cos\left(-t_2\right)+i\sin\left(t_2\right)}{r_2}\right|=1$. Ridicând la pătrat ambii membri şi utilizând identitatea $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ se deduce relaţia: $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2\cos(t_1-t_2)}{r_1 r_2}=1$. Putem alege exemplul solicitat cu $\cos(t_1-t_2)=0$: $r_1=r_2=\sqrt{2}, t_1=\pi, t_2=\frac{\pi}{2}$.

Problema 3

Soluţie

a) Se demonstrează uşor prin inducţie că $x_n \in (0,2), (\forall) n \in \mathbb{N}$.

Considerăm funcţia $f:(0,2)\to(0,2)$, $f(x)=\sqrt{4-2\cdot x}$

Relaţia de recurenţă $x_{n+1}=\sqrt{4-2\cdot x_n}, (\forall) n\in\mathbb{N}$ se scrie sub forma $x_{n+1}=f(x_n), (\forall) n\in\mathbb{N}$.

Punctele fixe ale funcţiei f sunt soluţiile ecuaţiei $f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{4-2\cdot x}=x \Leftrightarrow x^2+2\cdot x-4=0$ $\Leftrightarrow x=\sqrt{5}-1\in(0,2)$.

Funcţia f este strict descrescătoare, deoarece este egală cu funcţia care se obţine din compunerea funcţiilor $x\to\sqrt{x}$ şi $x\to 4-2x$, unde prima este strict crescătoare şi a doua strict descrescătoare.

Observăm că $x_{2n+2}=(f\circ f)(x_{2n}), (\forall) n\in\mathbb{N}$ şi $x_{2n+1}=(f\circ f)(x_{2n-1}), (\forall) n\in\mathbb{N}^*$.

Din f strict descrescătoare, deducem că $f\circ f$ este strict crescătoare.

Avem că $x_0=\frac{3}{2}, x_1=1, x_2=\sqrt{2}$ şi $x_3=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

Deci, $x_0>x_2>\sqrt{5}-1$ şi $x_1<x_3<\sqrt{5}-1$.

Cum $f\circ f$ este strict crescătoare şi $x_0>x_2>\sqrt{5}-1 \Rightarrow (f\circ f)(x_0)>(f\circ f)(x_2)>(f\circ f)(\sqrt{5}-1)$ $\Leftrightarrow x_2>x_4>\sqrt{5}-1 \Rightarrow \Rightarrow (f\circ f)(x_2)>(f\circ f)(x_4)>(f\circ f)(\sqrt{5}-1) \Leftrightarrow x_4>x_6>\sqrt{5}-1$

Prin inducţie se demonstrează că $x_{2n}>x_{2n+2}>\sqrt{5}-1, (\forall) n\in\mathbb{N}$.

Analog, din $x_1<x_3<\sqrt{5}-1$, $f\circ f$ strict crescătoare şi $x_{2n+1}=(f\circ f)(x_{2n-1}), (\forall) n\in\mathbb{N}^*$ se demonstrează prin inducţie că $x_{2n-1}<x_{2n+1}<\sqrt{5}-1, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$.

b) Prin urmare, $0<x_{2n-1}<\sqrt{5}-1, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$ şi $(x_{2n-1})_n$ strict crescător, deci există $a=\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}\in(0;\sqrt{5}-1]$.

Din $\sqrt{5}-1<x_{2n}, (\forall) n\in\mathbb{N}$ şi $(x_{2n})_n$ strict descrescător deducem că există $b=\lim_{n\to\infty} x_{2n}\in[\sqrt{5}-1;2)$.

Trecând la limită în relaţiile de recurenţă: $x_{2n+1}=\sqrt{4-2\cdot x_{2n}}, (\forall) n\in\mathbb{N}$ şi $x_{2n}=\sqrt{4-2\cdot x_{2n-1}}, (\forall) n\in\mathbb{N}$, deducem $a=\sqrt{4-2b}$ şi $b=\sqrt{4-2a}$, apoi scăzându-le avem că

$$a-b=\sqrt{4-2b}-\sqrt{4-2a} \Leftrightarrow a-b=\frac{4-2b-(4-2a)}{\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a}} \Leftrightarrow a-b=\frac{2(a-b)}{\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a}} \Leftrightarrow$$

$a=b$ sau $\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a}=2$.

Dar, $a=\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$, $(x_{2n-1})_n$ strict crescător şi $x_1=1$, deci $a>1$ (1)

$b=\lim_{n\to\infty} x_{2n}$, $(x_{2n})_n$ strict descrescător şi $x_{2n}>\sqrt{5}-1, (\forall) n\in\mathbb{N} \Rightarrow b\geq\sqrt{5}-1$ (2)

Din (1) şi (2) avem că $a+b>1+\sqrt{5}-1 \Rightarrow a+b>\sqrt{5}>2$.

Cum $a=\sqrt{4-2b}$ şi $b=\sqrt{4-2a}$ rezultă că $\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a}>2$, adică relaţia $\sqrt{4-2b}+\sqrt{4-2a}=2$ este imposibilă.

Rămâne că $a=b$ şi din ecuaţia $a=\sqrt{4-2a}$ deducem că $a=\sqrt{5}-1$.

În concluzie şirul $(x_n)_n$ este convergent şi are limita $\sqrt{5}-1$.