Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie, 2015

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Presupunem prin reducere la absurd că o există o funcție $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care admite primitive . Atunci f are proprietatea lui Darboux ,deci transformă orice interval într-un interval. Dacă trecem la limită în relația dată pentru $x \to 0, x > 0$ obținem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F\big(f(x)\big) = +\infty \quad \leftrightarrow$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $x \in (0, \delta_\varepsilon)$ implică $F\big(f(x)\big) \in (\varepsilon, +\infty)$.
Dacă alegem $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_0 > F\big(f(0)\big)$ atunci imaginea intervalului $\big[0, \delta_{\varepsilon_0}\big)$ nu este interval, $F\left(f\big(\big[0, \delta_{\varepsilon_0}\big)\big)\right)$=$\{F(f(0))\} \cup (\varepsilon_0, +\infty)$. Presupunerea este falsă, deci nu există astfel de funcții.

b) Arătăm ca g admite primitive scriind-o ca o derivată astfel :
$g(x) = xf(x) = xF'(x) + F(x) - F(x) = \big(xF(x)\big)' - F(x) = (xF(x) - H(x))'$, H este primitiva funcției continue F.
Derivăm relația funcțională o dată și obținem $x^2 f(x) = F(x) - G(x)$, ceea ce arată că f este o funcție derivabilă și derivând încă o dată relația avem:

$$x^2 f'(x) + (3x-1)f(x) = 0$$

$$f'(x) + \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) f(x) = 0$$

$$f'(x) + \left(3\ln x + \frac{1}{x}\right)' f(x) = 0$$

Înmulțim egalitatea cu $e^{3\ln x + \frac{1}{x}}$ și ecuația devine:

$$f'(x) \cdot e^{3\ln x + \frac{1}{x}} + \left(e^{3\ln x + \frac{1}{x}}\right)' f(x) = 0$$

$$\left(f(x) \cdot e^{3\ln x + \frac{1}{x}}\right)' = 0$$

Există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \cdot e^{3\ln x + \frac{1}{x}} = c$, sau

$$f(x) = c \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Pentru $x > 0$ determinăm mulțimea primitivelor funcției f:

$$\int c \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx = c \int \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} dx = c \int \frac{1}{x}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' dx = \frac{c}{x} e^{-\frac{1}{x}} - c \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx =$$

$$= c \cdot \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}\right) + \mathcal{E}$$

Problema 2.

Soluție. Pentru $f(a)$, $f(b) \in \mathbb{R}$ sunt posibile situațiile:

1) $f(a) = f(b) = \alpha$ atunci $f^{-1}(\{\alpha\}) = I$ interval cu $a, b \in I$.Dar $I \subseteq [a\ , b]$,deci $I = [a\ , b]$.
Amintim că $f^{-1}(\alpha) = \{x \in [a, b]/f(x) = \alpha\}$,deci funcția f este constantă.
2) $f(a) < f(b)$. Vom arăta că funcția f este crescătoare.
Pentru început, arătăm că dacă $x \in [a, b]$ atunci $f(x) \in [f(a), f(b)]$.
Dacă presupunem prin reducere la absurd că există $x \in [a, b]$ astfel încât $f(x) < f(a) < f(b)$ Folosind proprietatea Darboux ,rezultă că există $c \in (x, b)$, $f(c) = f(a) = \beta$.Atunci $f^{-1}(\beta) = J$ interval cu $c, a \in J$. Cum $a < x < c$ rezultă că $x \in J$, adică $f(x) = \beta = f(a)$,contradicție presupunerea făcută.
Dacă presupunem prin reducere la absurd că există $x \in [a, b]$ și $f(a) < f(b) < f(x)$ atunci , folosind proprietatea Darboux, există $d \in (a, x)$ și , $f(d) = f(b) = \gamma$. Din ipoteză avem că $f^{-1}(\gamma) = T$ interval și $d, b \in T$. Din $d < x < b$ obținem $x \in T$, deci $f(x) = \gamma = f(b)$, fals.
Să presupunem că există $x, y \in [a, b]$, $x < y$ și $f(x) > f(y)$.
Evident, $f(a) \leq f(y) < f(x) \leq f(b)$.Folosind proprietatea Darboux rezultă că există $z \in [a, x]$ astfel încât $f(z) = f(y) = \delta$ și $f^{-1}(\delta) = U$ interval care conține z și y.
Cum $z < x < y$ și z, y aparțin intervalului U atunci $x \in U$ sau $f(x) = \delta = f(y)$, fals.
Așadar, pentru orice $x, y \in [a, b]$, $x < y$ rezultă $f(x) \leq f(y)$,deci f crescătoare.
3) $f(a) > f(b)$.
Notăm $g = -f$ și g verifică ipotezele de la punctul 2),de unde rezultă că este crescătoare, deci f este descrescătoare.

Problema 3

Soluție.

Pentru n=2 fie $A \in M_3(\{-1; 1\})$, $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,3}}$ câștigătoare. Dacă notăm $a_{12} = a,\ a_{21} = b,\ a_{32} = c,\ a_{23} = d$ atunci este necesar ca$a_{22} = abcd,\ a_{11} = ab,\ a_{12} = ad,\ a_{31} = bc,\ a_{33} = dc$, deci matricea are forma $A = \begin{pmatrix} ab & a & ad \\ b & abcd & d \\ bc & c & dc \end{pmatrix}$.

Scriind elementele a,b,c,d ca produsul vecinilor lor de pe verticală și orizontală și ținând cont că pătratul oricărui element este 1 obținem:

$$a = (ab)(abcd)(ad) \Rightarrow c = 1$$
$$b = (ab)(abcd)(dc) \Rightarrow d = 1$$
$$c = (bc)(abcd)(dc) \Rightarrow a = 1$$
$$d = (ad)(abcd)(dc) \Rightarrow b = 1$$

Singura matrice câștigătoare din $M_3(\{-1; 1\})$ are toate elementele egale cu 1.

Vom demonstra prin inducție următoarea propoziție:

P(n) : Dacă $A \in M_{2^n-1}(\{-1; 1\})$ este câștigătoare atunci are toate elementele egale cu1

P(2) este verificată

Demonstrăm că P(n) adevărată implică P(n+1) adevărată

Presupunem prin reducere la absurd că există o matrice $A \in M_{2^{n+1}-1}(\{-1; 1\})$ câștigătoare și care conține cel puțin un -1.

Vom demonstra pentru început că ,dacă există o matrice câștigătoare care conține un -1 atunci este necesar să fie simetrică față de orizontală (linia 2^n) si verticală (coloana 2^n) .

Daca A nu este simetrica fata de verticala, consideram matricea A' obtinuta prin inmultirea fiecarui element cu simetricul sau fata de verticala $a'_{ij} = a_{ij}a_{i2^{n+1}-j}$, $j = \overline{1, 2^{n+1} - 1}$ (elem. de pe coloana 2^n sunt ridicate la patrat ,deci sunt toate 1). Se observa faptul ca A' este castigatoare (produsul elementelor vecine lui a'_{ij} dau a'_{ij} pentru că A era câștigătoare și conform definirii elementelor) simetrica fata de verticala, si contine un -1 (pentru că A nu era simetrică față de verticală). Repetand procedeul pe orizontala obtinem o matrice castigatoare simetrica fata de orizontală (linia 2^n) și față de verticală (coloana 2^n) care contine un -1. Pentru că toate elementele din linia și coloana2^n sunt1 atunci submatricele de ordin $2^n - 1$ separate de ele sunt câștigătoare. De exemplu, $a_{i\,2^n-1}$ rămâne egal cu produsul vecinilor săi din submatrice pentru că am renunțat la vecinul $a_{i\,2^n} = 1$.Conform ipotezei

inductive aceste submatrici câștigătoare de ordin $2^n - 1$ au toate elementele $+1$ ceea ce înseamnă că matricea A era simetrică față de linia și coloana 2^n,contradicție. Deci este necesar ca o matrice câștigătoare să fie simetrică față de linia și coloana 2^n.
Să arătăm că orice matrice simetrică, câștigătoare are elementele din linia 2^n și coloana 2^n egale cu +1.
Notăm $a_{2^n 1} = \alpha$ și $a_{1 2^n} = \beta$ cu $\alpha, \beta \in \{-1; 1\}$. Din faptul $a_{2^n 1}$ este produsul vecinilor săi și vecinii de pe verticală sunt egali pentru că matricea este simetrică avem că $a_{2^n\,1} = a_{2^n\,2}$. Similar,
$a_{2^n\,2} = a_{2^n 1} \cdot a_{2^n\,3}$,de unde obținem $a_{2^n\,3} = 1$. Repetând raționamentul obținem $a_{2^n\,j} = \alpha$, cu $j \neq 3p$ și $a_{2^n\,3p} = 1$,unde $j\,, 3p \in \{1,2, \dots , 2^{n+1} - 1\}$.
Repetând determinarea elementelor pentru coloana 2^n găsim că $a_{i\,2^n} = \beta$ cu $i \neq 3p$ și $a_{3p\,2^n} = 1$, unde $i\,, 3p \in \{1,2, \dots , 2^{n+1} - 1\}$ .Cum 2^n nu este multiplu de 3 avem că
$a_{2^n 2^n} = \alpha = \beta$.
Elementele vecine lui $a_{2^n 2^n}$ pot fi :

1. Toate α dacă 2^n este de forma 3p-1 și atunci $a_{2^n 2^n} = \alpha = \alpha^4$,deci $\alpha = 1$
2. Toate 1 dacă 2^n este de forma 3p+1 și atunci$\alpha = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, deci $\alpha = 1$

Pentru că toate elementele din linia și coloana2^n sunt1 atunci submatricele de ordin $2^n - 1$ separate de ele sunt câștigătoare. De exemplu, $a_{i\,2^n - 1}$ rămâne egal cu produsul vecinilor săi din submatrice pentru că am renunțat la vecinul $a_{i\,2^n} = 1$. În concluzie, cele 4 submatrici patratice din colturi sunt independente una de alta ,si din P(n) adevărată rezultă că au toate elementele +1, de unde si matricea mare are numai +1.Contradicție, așadar nu există matrice câștigătoare care să conțină un -1.Există o singură matrice câștigătoare ,cu toate elementele egale cu1