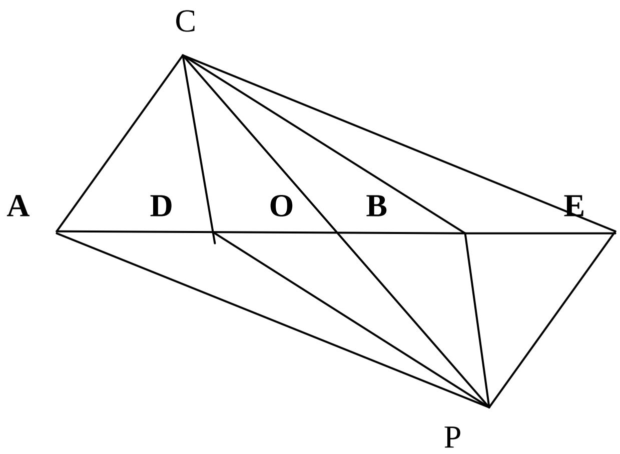
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie 2015

Clasa a VII-a

SOLUŢII

Problema 1
Soluţie.



a) AB=AD+DB ; DE=DB+BE; BE=AD→AB=DE

$$\Delta DEP \equiv \Delta BAC(L.U.L)\begin{cases}[AB]\equiv[DE]\\ [EP]\equiv[AC]\\ \sphericalangle DEP \equiv \sphericalangle BAC\end{cases}$$

b) $\Delta DEP \equiv \Delta BAC \rightarrow [DP]\equiv[BC], \sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle EDP$

$\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle EDP \rightarrow \sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle PDA$

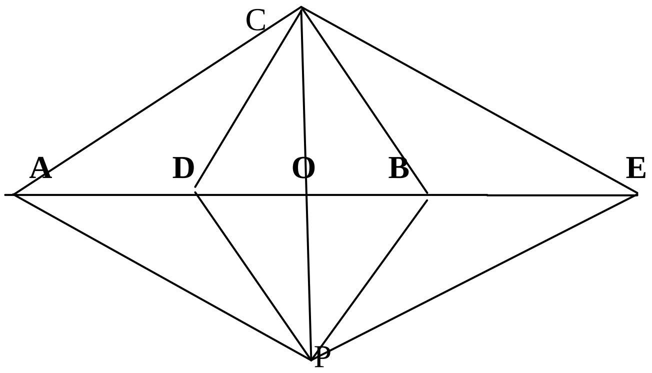
$$\Delta CBE \equiv \Delta PDA(L.U.L)\begin{cases}[AD]\equiv[BE]\\ [DP]\equiv[BC]\\ \sphericalangle PDA \equiv \sphericalangle CBE\end{cases} \rightarrow [AP]\equiv[CE]$$

c) $$\Delta DAC \equiv \Delta BEP(L.U.L)\begin{cases}[AD]\equiv[BE]\\ [EP]\equiv[AC]\\ \sphericalangle BEP \equiv \sphericalangle DAC\end{cases} \rightarrow [CD]\equiv[PB]$$

$\Delta DEP \equiv \Delta BAC \rightarrow [DP]\equiv[CB]$

$\begin{cases}[DP]\equiv[CB]\\ [CD]\equiv[PB]\end{cases} \rightarrow CDPB$ paralelogram → [CP] şi [BD] au acelaşi mijloc.

d)



CDPB romb $\rightarrow CP \perp DB$ și $[CD] \equiv [CB] \equiv [DP] \equiv [PB] \rightarrow \Delta CDB$ echilateral $\rightarrow$

$m(\measuredangle CDB) = m(\measuredangle CBD) = m(\measuredangle DCB) = 60^\circ$.

$\Delta CAB : CD = AD = BD \rightarrow [CD]$ este mediana si CD=$\dfrac{AB}{2} \rightarrow$

ΔACB este dreptunghic, $m(\measuredangle ACB) = 90^\circ, m(\measuredangle CBA) = 60^\circ \rightarrow m(\measuredangle CAB) = 30^\circ$.

Problema 2.
Soluţie.

a) $$\frac{n_1}{1+n_1}=\frac{n_2}{2+n_2}=...=\frac{n_{2015}}{2015+n_{2015}}\rightarrow$$

$$\frac{n_1+1}{n_1}=\frac{n_2+2}{n_2}=...=\frac{n_{2015}+2015}{n_{2015}}\rightarrow$$

$$1+\frac{1}{n_1}=1+\frac{2}{n_2}=...=1+\frac{2015}{n_{2015}}\rightarrow$$

$$\frac{1}{n_1}=\frac{2}{n_2}=...=\frac{2015}{n_{2015}}(1)$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{2}{n_2}+...+\frac{2015}{n_{2015}}=403$$

Prin urmare, $\frac{1}{n_1}+\frac{2}{n_2}+...+\frac{2015}{n_{2015}}=2015\cdot\frac{1}{n_1}=403\rightarrow n_1=\frac{2015}{403}\rightarrow n_1=5$

$$(1)\rightarrow\frac{1}{n_1}=\frac{2}{n_2}=...=\frac{2015}{n_{2015}}=\frac{1}{5}\rightarrow n_2=10, n_3=15,..., n_{2015}=10075\rightarrow n_1,n_2,...,n_{2015}\in\mathbb{N}^*$$

b)
$$S=n_1+n_2+n_3+...+n_{2015}=5+10+...+10075=5\cdot(1+2+...+2015)=5\cdot 2015\cdot 1008=10155600$$

c) $S^{2015}=10155600^{2015}=\overline{...6\underbrace{000...000}_{4030 \text{ cifre } 0}}\rightarrow$ suma ultimelor 4031 cifre este 6.

Problema 3

Soluţie.

a) I) Demonstrăm că dacă ecuația are soluții atunci *n* este impar.
Dacă perechea ordonată (x,y) este soluție a ecuației atunci
$(x,y)\cdot[x,y]=x\cdot y \rightarrow x+y+n\cdot(x,y)=[x,y].(*)$
Fie $d=(x,y)$. Atunci $x=d\cdot x_1, y=d\cdot y_1$, unde $x_1,y_1\in\mathbb{N}^*$ și $(x_1,y_1)=1$.
Înlocuind în relația (*) obținem: $x_1\cdot d+y_1\cdot d+n\cdot d=d\cdot x_1\cdot y_1 \rightarrow (x_1-1)\cdot(y_1-1)=n-1.(**)$
Deoarece $(x_1,y_1)=1$, cel puțin unul este impar$\rightarrow$cel puțin x_1-1 sau y_1-1este par. Din relația (**) rezultă că $n-1$este par, deci *n* este impar.
II) Demonstrăm că dacă *n* este impar atunci ecuația are soluții.
Presupunem că *n* este impar. Fie *x*=2 și *y*=*n*+2.
Deoarece *n* este impar, rezultă că $(x,y)=1$ și $[x,y]=2\cdot(n+2)$.
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{n}{[x,y]}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}+\frac{n}{2\cdot(n+2)}=1=\frac{1}{(x,y)}$, prin urmare ecuația are cel puțin o soluție.

b) Notăm $(x,y)=d$. Atunci $x=d\cdot x_1, y=d\cdot y_1$, unde $x_1,y_1\in\mathbb{N}^*$ și $(x_1,y_1)=1$. Înlocuind în relația (**) obținem $(x_1-1)\cdot(y_1-1)=2014$.
$D_{2015}=\{1,2,19,53,38,106,1007,2015\}\rightarrow$
$S=\{(2,2015);(3,1008);(20,107);(54,39);(107,20);(1008,3);(39,54);(2015,2)\}$
.