Inspectoratul Școlar al Județului Galați
Societatea de Științe Matematice din România **Colegiul Național „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galați **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediția a XVI-a
Galați, 31 octombrie 2015

Clasa a IX-a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. a) Fie $x=k+\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in[0;1)$ şi numerele $a=[4\cdot x]=[4\cdot k+4\cdot\alpha]=4\cdot k+[4\cdot\alpha]$, $b=2\cdot[x]+[2\cdot x]=2\cdot k+[2\cdot k+2\cdot\alpha]=4\cdot k+[2\cdot\alpha]$, $c=4\cdot[x]=4\cdot k$. Se obține $c\le b\le a$, de unde rezultă că $[2\cdot\alpha]=1$, $[4\cdot\alpha]=2$, deci $2\cdot\alpha\in[1;2)$, $4\cdot\alpha\in[2;3)$, adică $\alpha\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cap\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$, aşadar $\alpha\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. Obținem $x=k+\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

b) Avem $\sqrt{x_k\cdot\left(1-\frac{x_k}{k^2}\right)}=\frac{\sqrt{x_k\cdot\left(k^2-x_k\right)}}{k}\le\frac{x_k+k^2-x_k}{2\cdot k}=\frac{k}{2}$, $k\in\{1,2,...,2015\}$, de unde, prin adunarea celor 2015 inegalități rezultă că $\sum_{k=1}^{2015}\sqrt{x_k\cdot\left(1-\frac{x_k}{k^2}\right)}\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2015}k=\frac{2015\cdot 2016}{4}=2015\cdot 504$, de unde rezultă că are loc semnul $"="$ în toate cele 2015 inegalitați de mai sus, de unde se obține $x_k=\frac{k^2}{2}, k\in\{1,2,...,2015\}$.

Problema 2.

Soluție. a) Pentru $k\ge 2$, alegem $x=\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}$ şi se verifică imediat că $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$, de unde, introducând în relația din ipoteză, rezultă că $2\cdot k-1=\left[2\cdot k-1-\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}+\frac{1}{2}\right]$, adică $0=\left[\frac{1}{2}-\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}\right]=-1$,fals.

Pentru $k=0$ se obține $0=\left[-x+\frac{1}{2}\right], \forall x\in[0;1)$, fals.

Pentru $k=-1$ am obține $[-2\cdot x]=\left[-3\cdot x+\frac{1}{2}\right]$ şi se observă că pentru $x=\frac{1}{6}$ am avea $\left[\frac{-1}{3}\right]=0$, fals.

Pentru $k\le -2$, luăm $x=\frac{2\cdot k+1}{2\cdot k}$. Se verifică din nou că $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$ de unde, introducând în relația din ipoteză, va rezulta că $2\cdot k+1=\left[2\cdot k+1-\frac{2\cdot k+1}{2\cdot k}+\frac{1}{2}\right]$, adică $0=\left[\frac{1}{2}-\frac{2\cdot k+1}{2\cdot k}\right]=-1$, fals.

Pentru $k=1$ se obține $[2\cdot x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]$, $\forall x\in[0;1)$, afirmație adevărată care rezultă din identitatea lui Hermite.

b) Relația de demonstrat este echivalentă cu

$6\le 6\cdot(1+a+b)-3\cdot(a+b)\cdot(1+a+b)+2\cdot a\cdot b\cdot(1+a+b)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot(a+b)-3\cdot a^2-3\cdot b^2-6\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot b\cdot(a+b)\ge 0\Leftrightarrow$

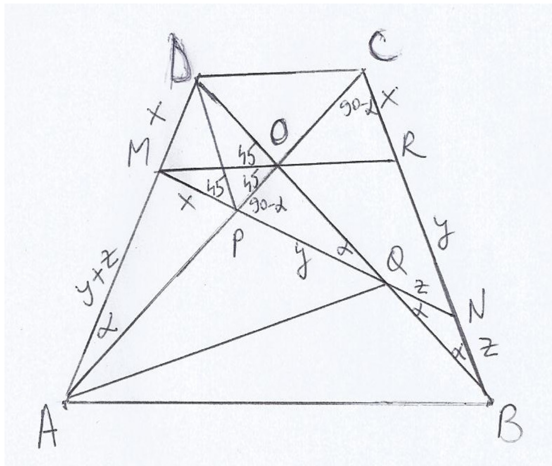
$\Leftrightarrow 3\cdot(a+b)-2\cdot(a+b)^2-a^2-b^2+2\cdot a\cdot b\cdot(a+b)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-a^2+b-b^2+2\cdot(a+b)-2\cdot(a+b)^2+2\cdot a\cdot b\cdot(a+b)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cdot(1-a)+b\cdot(1-b)+2\cdot(a+b)\cdot(1-a-b+a\cdot b)\geq 0$, şi în final, echivalent cu

$a\cdot(1-a)+b\cdot(1-b)+2\cdot(a+b)\cdot(1-a)\cdot(1-b)\geq 0$, relație adevărată pentru $a,b\in[0;1]$.

Problema 3



Soluție. Fie $\{P\}=AC\cap MN$, $\{Q\}=BD\cap MN$, $\{R\}=MO\cap BC$. Notăm cu $x=DM$, $y=RN$, $z=NB$.

Avem $m(\sphericalangle MOA)=m(\sphericalangle MOD)=45^0$, iar patrulaterul $OMAQ$ este inscriptibil, având $m(\sphericalangle AMQ)=m(\sphericalangle AOQ)=90^0$. Rezultă că $m(\sphericalangle MOA)=m(\sphericalangle MQA)=45^0$, deci triunghiul ΔAMQ este dreptunghic isoscel, aşadar $MQ=MA=RB=y+z$. Tot din faptul că patrulaterul $OMAQ$ este inscriptibil, va rezulta că $m(\sphericalangle MAO)=m(\sphericalangle OQM)=\alpha$. Trapezul $ABCD$ fiind isoscel rezultă că $m(\sphericalangle MAO)=m(\sphericalangle CBO)=\alpha$, iar din faptul că triunghiurile ΔOPQ, ΔBOC sunt dreptunghice rezultă că $m(\sphericalangle OPQ)=m(\sphericalangle OCB)=90^0-\alpha$, deci triunghiul ΔNPC va fi isoscel, iar

$PN=CN=CR+RN=x+y$.

Patrulaterul $DMPO$ este inscriptibil, având unghiurile opuse $\sphericalangle DOP$, $\sphericalangle DMP$ drepte, deci $m(\sphericalangle DOM)=m(\sphericalangle DMP)=45^0$. Rezultă că triunghiul ΔDMP este dreptunghic isoscel, deci

$DM=MP=x$.

Unghiurile $\sphericalangle OQP$, $\sphericalangle NQB$ sunt opuse la vârf, deci $m(\sphericalangle OQP)=m(\sphericalangle NQB)=\alpha=m(\sphericalangle NBQ)$, deci triunghiul ΔNBQ este isoscel, de unde rezultă că $NQ=NB=z$.

Avem $PN=x+y=PQ+z$, respectiv $MQ=y+z=PQ+x$. Prin adunarea acestor două relații rezultă că $x+2\cdot y+z=2\cdot PQ+x+z$, de unde rezultă că $PQ=y$, adică

$MN=MP+PQ+QN=x+y+z$, iar

$AD=DM+MA=x+y+z$, deci $MN=AD$.