

Concursul Interjudețean de Matematică “Cristian S. Calude”
Proba pe echipe, clasele IX-X

Runda I

Problema 1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \neq q$, astfel încât $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{a_1 + a_2 + \dots + a_q} = \frac{p^2}{q^2}$.

Să se determine $\frac{a_p}{a_q}$ în funcție de p și q .

$$\text{Soluție. Avem } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{a_1 + a_2 + \dots + a_q} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{(a_1 + a_p) \cdot p}{2}}{\frac{(a_1 + a_q) \cdot q}{2}} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{(a_1 + a_p) \cdot p}{(a_1 + a_q) \cdot q} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_p}{a_1 + a_q} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot a_1 + (p-1) \cdot r}{2 \cdot a_1 + (q-1) \cdot r} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 \cdot a_1 \cdot q + p \cdot r \cdot q - r \cdot q = 2 \cdot a_1 \cdot p + q \cdot r \cdot p - r \cdot p \Leftrightarrow 2 \cdot a_1 \cdot (q-p) = r \cdot (q-p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \cdot a_1, \text{ apoi deducem că } \frac{a_p}{a_q} = \frac{a_1 + (p-1) \cdot r}{a_1 + (q-1) \cdot r} = \frac{a_1 + (p-1) \cdot 2 \cdot a_1}{a_1 + (q-1) \cdot 2 \cdot a_1} = \frac{2 \cdot p - 1}{2 \cdot q - 1}.$$

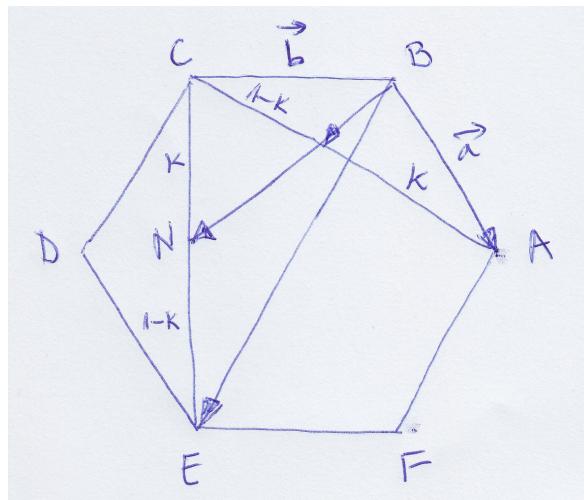
Răspuns: $\frac{2 \cdot p - 1}{2 \cdot q - 1}$

Problema 2. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și $M \in (AC)$, $N \in (CE)$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$.

Determinați valoarea lui k pentru care punctele B, N, M sunt coliniare.

Soluție. Fie $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ și $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{BE} = 2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$.

Avem că $\overrightarrow{BM} = (1-k) \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$ și $\overrightarrow{BN} = 2 \cdot k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (1-k) \cdot \vec{b}$.



Punctele B, M, N sunt coliniare $\Leftrightarrow \frac{k}{1+k} = \frac{1-k}{2 \cdot k} \Leftrightarrow 3 \cdot k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Răspuns: $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Problema 3. Să se determine minimul expresiei

$$E(a,b,c) = \log_a\left(\frac{1}{2} \cdot b - \frac{1}{16}\right) + \log_b\left(\frac{1}{2} \cdot c - \frac{1}{16}\right) + \log_c\left(\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{16}\right), \text{ unde } a,b,c \in \left(\frac{1}{8}; 1\right),$$

precum și valorile a,b,c pentru care se realizează minimul.

Soluție. Avem că $\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{16} \leq x^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 0$, cu egalitate pentru $x = \frac{1}{4}$.

Deci, $\frac{1}{2} \cdot b - \frac{1}{16} \leq b^2 \Rightarrow \log_a\left(\frac{1}{2} \cdot b - \frac{1}{16}\right) \geq \log_a b^2 = 2 \cdot \log_b a$, pentru $b \in \left(\frac{1}{8}; 1\right)$.

Analog, $\log_b\left(\frac{1}{2} \cdot c - \frac{1}{16}\right) \geq 2 \cdot \log_c b$ și

$$\log_c\left(\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{16}\right) \geq 2 \cdot \log_a a.$$

Prin urmare,

$$E(a,b,c) = \log_a\left(\frac{1}{2} \cdot b - \frac{1}{16}\right) + \log_b\left(\frac{1}{2} \cdot c - \frac{1}{16}\right) + \log_c\left(\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{16}\right) \geq 2 \cdot (\log_a b + \log_b c + \log_c a).$$

Din inegalitatea mediilor avem că $\frac{\log_a b + \log_b c + \log_c a}{3} \geq \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3$. Deci, $E(a,b,c) \geq 2 \cdot (\log_a b + \log_b c + \log_c a) \geq 2 \cdot 3 = 6$, cu egalitate

pentru $a = b = c = \frac{1}{4}$.

Răspuns: $E_{\min} = 6$ și $a = b = c = \frac{1}{4}$.

Problema 4. Să se calculeze $\cos \frac{2 \cdot \pi}{7} + \cos \frac{4 \cdot \pi}{7} + \cos \frac{6 \cdot \pi}{7}$.

Soluție. Fie $A = \cos \frac{2 \cdot \pi}{7} + \cos \frac{4 \cdot \pi}{7} + \cos \frac{6 \cdot \pi}{7}$.

$$\text{Avem că } 2 \cdot A \cdot \sin \frac{\pi}{7} = 2 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5 \cdot \pi}{7} 2 \cdot \cos \frac{4 \cdot \pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{6 \cdot \pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} =$$

$$= \sin \frac{3 \cdot \pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5 \cdot \pi}{7} - \sin \frac{3 \cdot \pi}{7} + \sin \frac{7 \cdot \pi}{7} - \sin \frac{5 \cdot \pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}, \text{ de unde rezultă că } A = -\frac{1}{2}.$$

Altfel, considerăm $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{\pi}{7}$. Avem că $\cos \frac{n \cdot \pi}{7} = \frac{1}{2} \cdot \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{Prin urmare, obținem } A &= \cos \frac{2 \cdot \pi}{7} + \cos \frac{4 \cdot \pi}{7} + \cos \frac{6 \cdot \pi}{7} = \frac{1}{2} \cdot \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{12} + z^{10} + z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 - z^6}{z^6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{z^{14}-1}{z^2-1} - z^6}{z^6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{14}-1}{z^6 \cdot (z^2-1)} - 1 = -1, \text{ deoarece } z^{14} = 1, \text{ de} \end{aligned}$$

unde rezultă că $A = -\frac{1}{2}$.

Răspuns: $-\frac{1}{2}$