

Concursul Interjudețean „Cristian S. Calude”

Galați

24 octombrie 2015

SUBIECT DE TIP



pentru clasa a VI-a

1⁵. În primii 2015 termeni ai șirului 1,3,6,10,15,21,28,36,45, 55, 66,78..., un număr de x termeni au ultima cifră nenulă. Atunci x este egal cu:

A	B	C	D	E
1490	1500	1613	1512	Alt răspuns

Indicație. Termenii șirului sunt de forma $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, unde $n = 1, 2, 3, \dots$. Deci, termenii șirului care au ultima cifră 0 sunt cei pentru care avem că 20 divide $n \cdot (n+1)$. Vă urăm să continuați cu succes rezolvarea problemei.

2³. Care este restul împărțirii numărului 27^{174} la 5?

A	B	C	D	E
4	3	2	1	Alt răspuns

3⁴. Câte numere naturale impare conține mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5^{2014} - 1 \leq x \leq 5^{2015} + 1\}$?

A	B	C	D	E
5^{2014}	$2 \cdot 5^{2014}$	$2 \cdot 5^{2014} + 2$	$2 \cdot 5^{2014} + 1$	Alt răspuns

4². A 2015 – a zecimală a numărului 2,02(14578) este egală cu:

A	B	C	D	E
1	4	5	7	Alt răspuns

5¹. Dacă $x + 0,75 = 3,085$ atunci numărul x este egal cu:

A	B	C	D	E
2,335	3,015	3,335	3,855	Alt răspuns

6². Ultima cifră a numărului natural $a = 2012^{2015} + 2013^{2014}$ este egală cu:

A	B	C	D	E
5	7	6	9	Alt răspuns

7⁵. Fie $S = 1 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + \dots + 7^{2014} + 7^{2015}$. Să se determine suma ultimelor patru cifre ale numărului natural S .

A	B	C	D	E
7	11	5	14	Alt răspuns

Soluție. $S = (1+7^1+7^2+7^3) + (7^4+7^5+7^6+7^7) \dots + (7^{2012}+7^{2013}+7^{2014}+7^{2015})$, de unde deducem $S = (1+7^1+7^2+7^3) + 7^4 \cdot (1+7^1+7^2+7^3) \dots + 7^{2012} \cdot (1+7^1+7^2+7^3) = 400 \cdot (1+7^4+7^8+\dots+7^{2012})$.

Folosind formula $(a+b)^n = M_a + b^n$ și $7^4 = 2401 = 2400 + 1$, deducem că $7^{4k} = M_{100} + 01$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Deci, suma $1+7^4+7^8+\dots+7^{2012}$ are 504 termeni cu ultimele două cifre 01, deci $1+7^4+7^8+\dots+7^{2012} = M_{100} + 504 = M_{100} + 04$.

Prin urmare, $S = 400 \cdot (1+7^4+7^8+\dots+7^{2012}) = 400 \cdot (M_{100} + 04) = 400 \cdot M_{100} + 400 \cdot 4 = M_{10000} + 1600$, de unde rezultă că ultimele 4 cifre ale lui sunt 1600.

8³. Rezultatul calculului $5,61 + 3 \cdot [2 + 4 \cdot (42,3 : 0,9 + 5,2)]$ este egal cu:

A	B	C	D	E
696,81	130,41	637,65	638,01	Alt răspuns

9⁴. Cel mai mic număr natural care are exact 2015 divizori este egal cu:

A	B	C	D	E
$2^{402} \cdot 5^4$	$2^{30} \cdot 3^{12} \cdot 5^4$	$2^{29} \cdot 3^{11} \cdot 5^4$	2^{2004}	Alt răspuns

10¹. Dacă notăm cu D_n mulțimea divizorilor naturali ai numărului natural n , atunci numărul elementelor din mulțimea $D_{12} \cap D_{18}$ este egal cu:

A	B	C	D	E
2	4	6	15	Alt răspuns

11⁵. Cu cât este egal restul împărțirii numărului $161^{2005} + 1357$ la 1127 ?

A	B	C	D	E
100	231	245	230	Alt răspuns

12³. Să se determine numerele de forma \overline{ab} care satisfac condiția $a^{(\overline{ab})^2} = (16^{101} - 8^{134} - 4^{200}) : 11$.

A	B	C	D	E
27	21	20	16	Alt răspuns

13². Determinați numărul natural x pentru care $x^2 + 10^{2014} = 10^{2015}$.

A	B	C	D	E
10^{2014}	5^{2014}	10^{1006}	$3 \cdot 10^{1006}$	Alt răspuns

Răspunsul corect este $3 \cdot 10^{1007}$.

14⁴. Determinați cel mai mic număr natural de trei cifre care are exact șase divizori.

A	B	C	D	E
147	242	175	117	Alt răspuns

Răspuns corect: 116

15⁵. Se consideră șirul crescător al tuturor numerelor naturale scrise numai cu cifrele 0, 2, 5 și 8, adică șirul 0, 2, 5, 8, 20, 22, 25, 28, 50, 52, 55, 58, 80, 82, 85, 88, 200, 202, 205, 208, 220, 222 Să se determine al 2500-lea număr din acest șir.

A	B	C	D	E
588008	528808	528020	528088	Alt răspuns

Răspuns corect: 528008

Soluție. Se consideră corespondența $0 \leftrightarrow 0, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 5, 3 \leftrightarrow 8$. Dacă înlocuim cifrele 0, 2, 5, 8 cu 0, 1, 2 respectiv 3 obținem șirul 0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100,, adică șirul crescător al numerelor naturale scrise în baza 4. Prin urmare, al 2500-lea număr din șir este numărul din baza 4 care-i corespunde lui 2499 în baza 10. Avem că $2499_{(10)} = 213003_{(4)}$.

16¹. Determinați numărul natural x care verifică egalitatea $7 \cdot x + 13 = 104$.

A	B	C	D	E
7	1	14	13	Alt răspuns

17⁴. Câte fracții ireductibile conține mulțimea: $A = \left\{ \frac{1}{2016}; \frac{2}{2016}; \frac{3}{2016}; \dots; \frac{2014}{2016}; \frac{2015}{2016} \right\}$?

A	B	C	D	E
576	324	832	1240	Alt răspuns

18². Dacă numerele prime x și y verifică relația $5 \cdot x + 8 \cdot y = 98$, atunci calculați $x + y$.

A	B	C	D	E
12	20	18	13	Alt răspuns

19³. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, știind că: $63 + 2 \cdot 63 + 3 \cdot 63 + \dots + 48 \cdot 63 = n^3$.

A	B	C	D	E
43	56	63	35	Alt răspuns

Răspuns corect: 42.

20². Suma cifrelor celui mai mic multiplu comun al numerelor naturale 24 și 18 este egală cu:

A	B	C	D	E
9	8	13	16	Alt răspuns

21¹. Cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizor al lui } 20\}$ este egal cu:

A	B	C	D	E
6	8	5	7	Alt răspuns

22³. Suma tuturor numerelor naturale x care au proprietatea că $\frac{49}{2 \cdot x + 1} \in \mathbb{N}$ este egală cu:

A	B	C	D	E
3	54	24	27	Alt răspuns

23⁴. În fiecare an, un negustor cheltuiește 100 de lire sterline pentru întreținerea familiei, dar își sporește restul averii cu o treime din cât i-a rămas. După trei ani constată că și-a dublat avera inițială. Câți bani a avut la început?

A	B	C	D	E
1500	1460	2100	1800	Alt răspuns

Răspuns corect: 1480

24¹. Rotunjirea la sutimi a numărului 4,2947 este egală cu:

A	B	C	D	E
4,295	4,3	4,29	4,28	Alt răspuns

25⁵. Produsul cifrelor restului împărțirii numărului $88621\underbrace{999\dots98}_{2015 \text{ cifre}}$ la 73 este egal cu:

A	B	C	D	E
54	7	0	14	Alt răspuns

Soluție. Dacă adunăm 2 la numărul dat obținem $88621\underbrace{999\dots98}_{2015 \text{ cifre}} + 2 = 88622\underbrace{000\dots00}_{2015 \text{ cifre}}$ și 88622 este un număr divizibil cu 73, de unde rezultă că restul împărțirii numărului inițial la 73 este 71.

O altă metodă, așa putea spune „șmecherească”, este următoarea: se împarte numărul 886219998 la 73 și se observă că din momentul când se coboară cifrele marcate cu verde se obține mereu restul 72 ($729:73=9$ rest 72), iar când coborâm ultima cifră (cifra 8) vom avea $728:73=9$ rest 71, de unde deducem că restul împărțirii este 71. Câtul împărțirii este $1213\underbrace{999\dots99}_{\text{de } 2015 \text{ ori}}$.

Revenind la cifrele inițiale (vezi corespunzător de mai sus), obținem că răspunsul corect este: 528008.