Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XVII-a
Galaţi, 5 noiembrie 2016

Clasa a XIIa

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

a) i) $x\in G \Leftrightarrow |x-k|\ge \frac{1}{k}, |x*y-k|=k|x-k|\cdot|y-k|\ge k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$ adică $x*y\in G$ ………...2 puncte

ii) elementul neutru este $e=k+\frac{1}{k}$ şi elemetele simetrizabile sunt $k+\frac{1}{k}, k-\frac{1}{k}$ ……..…...........1 punct

iii) Se demonstrează prin inducţie că $\underbrace{x*x*...*x}_{de\ n\ ori}=k^{n-1}\cdot(x-k)^n+k,\quad x\in G$, ecuaţia devine:

$$k^{2015}\cdot(3-k)^{2016}+k=\frac{4^{1008}}{k}+k \Leftrightarrow k^{2016}\cdot(3-k)^{2016}=4^{1008}\Leftrightarrow (3k-k^2)^{2016}=2^{2016}$$

Deci, $|3k-k^2|=2$ rezultă $k\in\left\{1,2,\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$, dar doar $k=2$ convine. …......…...….............1 punct

b) $\frac{1}{f}\in\int f(x)dx \Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=f(x)$ ....1 punct

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=f(x)\Rightarrow f^3(x)=-f(x)\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^3(x)}=-1\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f^2(x)}\right)'=(-x+k)'\Rightarrow$$

$2f^2(x)\cdot(-x+k)=-1$...1punct

Din $f(0)=1\Rightarrow 2k=1\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$ şi $f^2(x)=\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{2}+x\right)}=\frac{1}{1+2x}$; I este orice interval care nu conţine pe $-\frac{1}{2}$ şi $f(x)=\sqrt{1+2x}$ ....1 punct

Problema 2

a) Fie şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, y_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$. Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător.......................1 punct

Fie $l>0$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} nf(n)=l$. Dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ar fi mărginit superior, atunci

$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}=0$. ....1 punct

Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)f(n+1)=l$, conform lemei lui Stolz-Cesaro, ar rezulta contradicţia

$l=0.$ Aşadar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit superior, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)=\infty$ ....1 punct

b) Vrem să arătăm că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi mărginit. Pentru aceasta considerăm $n\in\mathbb{N}$ arbitrar fixat.

Conform teoremei lui Lagrange, aplicată funcţiei $F:[n,n+1]\to\mathbb{R},$ există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $F(n+1)-F(n)=f(c_n).$ Atunci, deoarece funcţia *f* este descrescătoare, avem, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n=f(n+1)-f(c_n)\le 0,$ deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător (1)...............................1 punct

Teorema lui Lagrange împreună cu faptul că funcţia *f* este descrescătoare ne asigură că

$f(2)\le F(2)-F(1)\le f(1)$

.....

$f(n)\le F(n)-F(n-1)\le f(n-1),$

De unde, prin adunarea acestor relaţii, obţinem

$F(n)\le f(1)+f(2)+...+f(n-1)+F(1).$

Atunci

$$F(1)\le f(n)+F(1)=x_n+\left[F(n)-F(1)\right]-\left(f(1)+...+f(n-1)\right)+F(1)=$$

$$=x_n+F(n)-\left(f(1)+...+f(n-1)\right)\le x_n+F(1),$$

adică $0\le x_n,(\forall)n\in\mathbb{N}^*.$

deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit inferior (2).

Din (1) şi (2) rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent...2 puncte

Avem că $\dfrac{x_n}{F(n)}=\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{F(n)}-\dfrac{F(n)-F(1)}{F(n)}$ pentru $(\forall)n\in\mathbb{N}^*.$

Deoarece $F'=f\ge 0,$ deducem că *F* este crescătoare, de unde rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty}F(n).$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)=\infty$, deoarece în caz contrar, am găsi că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{F(n)}=0.$ Atunci, conform relaţiei de mai sus, avem

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{F(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(n)-F(1)}{F(n)}=1$..1 punct

Problema 3

a) Pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$ notăm $U_m=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z^m=1\right\}.$ Se ştie că U_m este unicul subgrup cu m elemente al grupului $\left(\mathbb{C}^*,\cdot\right)$..1 punct

Fie $x,y\in G_p=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}U_{p^n}$. Rezultă deci că există $n,r\in\mathbb{N}$ astfel incât $x\in U_{p^n}$ şi $y\in U_{p^r}$. Dacă $m=\max(n,r)$ atunci $x,y\in U_{p^m}$, de unde deducem că $xy^{-1}\in U_{p^m}$. Rezultă că $xy^{-1}\in G_p$, deci G_p este subgrup.. 2 puncte

b) Demonstraţia directă...2 puncte

Demonstraţia reciprocă...2 puncte