**Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi**
**Societatea de Ştiinţe Matematice din România** **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
**Filiala Galaţi** **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

**Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVII-a**
**Galaţi, 5 noiembrie 2016**

***Clasa a VIII -a***

***SOLUŢII***

**Problema 1.**

**a)** Să se demonstreze că nu există numere întregi **m** și **n** astfel încât $m^3+m^2\cdot n+m\cdot n^2+n^3=2015$.
**b)** Să se demonstreze că pentru orice numere naturale **m** și **n** relațiile :
$m^2+n=2015^{2016}-1$ și $n^2+m=2017^{2016}-2$ nu sunt simultan adevărate.

**Soluţie.**

**a)**

$m^3+m^2\cdot n+m\cdot n^2+n^3=2015 \leftrightarrow (m^2+n^2)\cdot(m+n)=1\cdot5\cdot13\cdot31 \to m^2+n^2$ este impar şi $m+n$ este impar $\to$ $m$ și $n$ au parități diferite.

Cazul I)

$$\left.\begin{array}{l} m=2\cdot k+1 \\ n=2\cdot p \end{array}\right\} \to m^2+n^2=4\cdot(k^2+p^2+k)+1 \to m^2+n^2=M_4+1, unde\ k,p\in\mathbb{N};$$

Cazul I)

$$\left.\begin{array}{l} m=2\cdot k \\ n=2\cdot p+1 \end{array}\right\} \to m^2+n^2=4\cdot(k^2+p^2+p)+1 \to m^2+n^2=M_4+1, unde\ k,p\in\mathbb{N};$$

Prin urmare, pentru orice $m$ și $n$ , numere întregi $m$ și $n$ , $m^2+n^2=M_4+1$.

$\to m^2+n^2\in\{1,5,13,65\}\to$

$m^2+n^2=1\to(m,n)\in\{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}\to m+n\neq2015.$

$m^2+n^2=5\to(m,n)\in\{(2,1),(2,-1),(1,2),(-1,2)\}\to m+n\neq403.$

$m^2+n^2=13\to(m,n)\in\{(2,3),(2,-3),(-2,3),(-2,-3)\}\to m+n\neq155.$

$m^2+n^2=65\to(m,n)\in\{(1,8),(1,-8),(-1,8),(-1,-8),(7,4),(-7,4),(7,-4),(-7,-4)\}\to m+n\neq31.$

Prin urmare, pentru orice $m$ și $n$ , numere întregi, egalitatea din enunț este imposibilă.

**b)**

Demonstrație prin reducere la absurd.
Presupunem că ambele egalități sunt adevărate.

$m^2+n=2015^{2016}-1\to m^2+n+1=(2015^{1008})^2\to m^2+n+1$ este pătrat perfect.

$n^2+m=2017^{2016}-2\to n^2+m+2=(2017^{1008})^2\to n^2+m+2$ este pătrat perfect

$$\left.\begin{array}{l} m^2+n+1\geq(m+1)^2 \\ n^2+m+2\geq(n+1)^2 \end{array}\right\} \to n\geq2\cdot m \text{ şi } m+1\geq2\cdot n\to m+n\leq1.$$

$m,n\in\mathbb{N}\to m$

$1) m=0, n=0-$ nu convine

$2) m=0, n=1-$ nu convine

$3) m=1, n=0-$ nu convine

Prin urmare, presupunerea făcută este falsă deci nu există numere naturale $m$ și $n$ astefel încât ambele egalități să fie simultan adevărate.

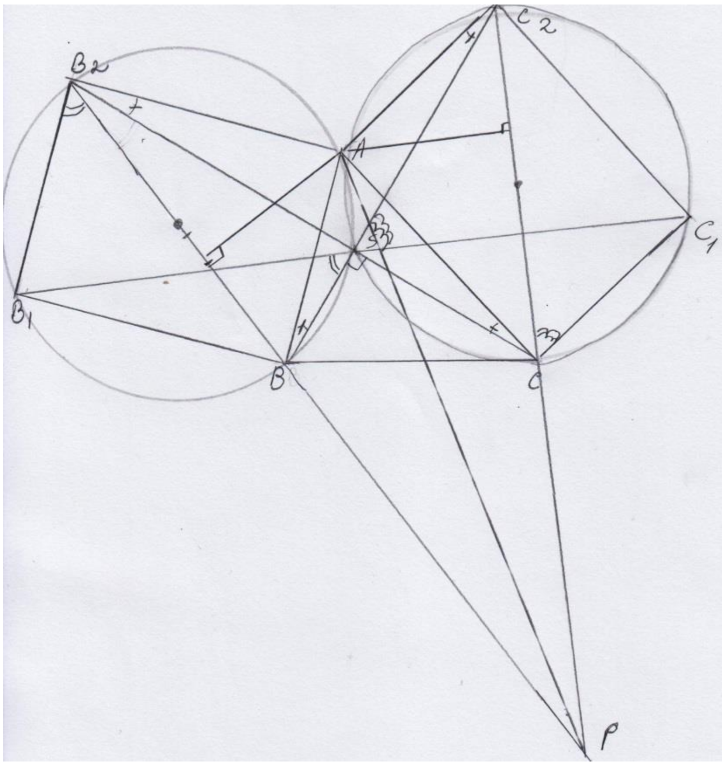
**Problema 2.**
Pe laturile triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc spre exterior dreptunghiurile congruente $ABB_1B_2$ și $AC_2C_1C$. Fie P punctul de intersecție al dreptelor $BB_2$ și $CC_2$ și S punctul de intersecție al dreptelor $BC_2$ și $CB_2$. Demonstrați că:

a) $BC_2 \perp CB_2$;

b) Punctele $B_1$, $S$ și $C_1$ sunt coliniare;

c) Semidreapta $[PA$ este bisectoarea unghiului $BPC$;

d) Patrulaterul $BPCA$ are două unghiuri opuse complementare.




**Soluţie.**

**a)**

$Notăm\ m(\sphericalangle BAC) = A$ ; $m(\sphericalangle ABC) = B$ ; $m(\sphericalangle ACB) = C$

$ABCC_2$ patrulater convex $\rightarrow C_2 \in Int\,ABC \rightarrow [BC_2 \subset Int\,ABC$;

Analog $[CB_2 \subset Int\,ABC$.

$m(\sphericalangle B_2AC) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle BAB_2) = m(\sphericalangle A) + 90^\circ = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle CAC_2) = m(\sphericalangle C_2AB) \rightarrow \sphericalangle B_2AC \equiv \sphericalangle C_2AB$

$\Delta B_2AC$ și $\Delta C_2AB$ sunt isoscele $\rightarrow \sphericalangle AB_2C \equiv \sphericalangle ACB_2 \equiv \sphericalangle ABC_2 \equiv \sphericalangle AC_2B$

Fie $\alpha = m(\sphericalangle AB_2C)$. Avem: $m(\sphericalangle SBC) = B - \alpha$ ; $m(\sphericalangle SCB) = C - \alpha \rightarrow$

În $\triangle SBC$ avem: $m(\sphericalangle BSC) = 180^\circ - (B - \alpha + C - \alpha) = A + 2\alpha$

În $\triangle AB_2C$ avem: $A + 90^\circ + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow$

$A + 2\alpha = 90^\circ \rightarrow m(\sphericalangle BSC) = 90^\circ \rightarrow BC_2 \perp CB_2$.

**b)**

$BC_2 \perp CB_2 \rightarrow m(\sphericalangle BSB_2) = 90^\circ \rightarrow S \in$cercului de diametru *[BB₂]* care este circumscris dreptunghiului $ABB_1B_2 \rightarrow B_1BSB_2$ este inscriptibil $\rightarrow \sphericalangle BSB_1 \equiv \sphericalangle BB_2B_1$;

Analog demonstrăm $C_1CSC_2$ este inscriptibil $\rightarrow \sphericalangle C_1SC_2 \equiv \sphericalangle C_2CC_1$;

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle BB_2B_1 \equiv \sphericalangle C_2CC_1 \rightarrow \sphericalangle BSB_1 \equiv \sphericalangle C_1SC_2 \\ B, S, C_2 \text{ coliniare} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow B_1, S, C_1$ coliniare.

**c)**

$ABPC$ patrulater convex $\rightarrow A \in Int\sphericalangle BPC$ .

În $\triangle AB_2B \equiv \triangle ACC_2$ înălțimile din A sunt congruente

$\rightarrow d(A, PB) = d(A, PC) \rightarrow A \in$ bisectoarei $\sphericalangle BPC \rightarrow [PA$ este bisectoarea $\sphericalangle$BPC.

**d)**

$\triangle AB_2B \equiv \triangle ACC_2 \rightarrow \sphericalangle BB_2A \equiv \sphericalangle ACC_2$

$m(\sphericalangle B_2BA) + m(\sphericalangle ACC_2) = m(\sphericalangle B_2BA) + m(\sphericalangle BB_2A) = 90^\circ \rightarrow$

$m(\sphericalangle ABP) + m(\sphericalangle ACP) = 270^\circ \rightarrow$ în patrulaterul convex $ABPC$ avem $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle BPC) = 90^\circ$.

**Problema 3**

**a)** Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}\geq\frac{4\cdot(u\cdot x+v\cdot y)}{(x+y)^2}$

pentru orice numere reale $u,v,x,y>0.$

**b)** Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a}{b+2\cdot c+d}+\frac{b}{c+2\cdot d+a}+\frac{c}{d+2\cdot a+b}+\frac{d}{a+2\cdot b+c}\geq 1.$$

**Soluţie.**

**a)**

Din inegalitatea $(x+y)^2\geq 4\cdot x\cdot y\to\frac{1}{x\cdot y}\geq\frac{4}{(x+y)^2}$

Atunci $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=\frac{u\cdot y+v\cdot x}{x\cdot y}\geq\frac{4(u\cdot y+v\cdot x)}{(x+y)^2}$

**b)**

Aplicând (a) pentru $u=a$ ,v=c,x=$b+2\cdot c+d$, $y=d+2\cdot a+b$

obținem $\frac{a}{b+2\cdot c+d}+\frac{c}{d+2\cdot a+b}\geq\frac{2\cdot a^2+2\cdot c^2+a\cdot b+b\cdot c+c\cdot d+d\cdot a}{(a+b+c+d)^2}$ (1) și

$\frac{b}{c+2\cdot d+a}+\frac{d}{a+2\cdot b+c}\geq\frac{2\cdot b^2+2\cdot d^2+a\cdot b+b\cdot c+c\cdot d+d\cdot a}{(a+b+c+d)^2}$ (2).

Sumând relațiile (1) și (2) obținem inegalitatea:

$$\frac{a}{b+2\cdot c+d}+\frac{b}{c+2\cdot d+a}+\frac{c}{d+2\cdot a+b}+\frac{d}{a+2\cdot b+c}$$
$$\geq\frac{2\cdot a^2+2\cdot c^2+a\cdot b+b\cdot c+c\cdot d+d\cdot a+2\cdot b^2+2\cdot d^2+a\cdot b+b\cdot c+c\cdot d+d\cdot a}{(a+b+c+d)^2}\to$$
$$\frac{a}{b+2\cdot c+d}+\frac{b}{c+2\cdot d+a}+\frac{c}{d+2\cdot a+b}+\frac{d}{a+2\cdot b+c}\geq\frac{(a+b+c+d)^2+(a^2+b^2+c^2+d^2-2\cdot a\cdot c-2\cdot b\cdot d)}{(a+b+c+d)^2}\to$$
$$\frac{a}{b+2\cdot c+d}+\frac{b}{c+2\cdot d+a}+\frac{c}{d+2\cdot a+b}+\frac{d}{a+2\cdot b+c}\geq 1+\frac{(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\geq 1$$