Inspectoratul Școlar al Județului Galați
Societatea de Științe Matematice din România **Colegiul Național „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galați **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediția a XVII-a
Galați, 05 noiembrie 2016

Clasa a X-a

SOLUȚII

Problema 1.
Soluție. a) Se impun condițiile: $2\cdot x+1\in\mathbb{N}$, $2\cdot x+1\geq 2$, $11-4\cdot x\in\mathbb{N}$, $11-4\cdot x\geq 2$, $6\cdot x-1\in\mathbb{N}$, $6\cdot x-1\geq 2$. Rezultă că $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right]$, împreună cu condiția suplimentară $2\cdot x=n\in\mathbb{N}$.
Deci $x\in\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$, din care convine $x=\frac{3}{2}$. Aşadar $x=\frac{3}{2}$ este soluție unică.

b) Relația de demonstrat este echivalentă cu $\log_a\frac{A}{B}>\log_{B+k}\frac{A+k}{B+k}$.
Dar $\log_a x>\log_{B+k}x$, $x>1$, deoarece $\frac{1}{\log_x a}>\frac{1}{\log_x(B+k)}\Leftrightarrow \log_x a<\log_x(B+k)\Leftrightarrow a<B+k$, relație adevărată din ipoteză.
Aşadar, pentru $x=\frac{A}{B}>1$, rezultă că $\log_a\frac{A}{B}>\log_{B+k}\frac{A}{B}$, şi, ținând cont de faptul că $\frac{A}{B}>1$ şi $k>0$, rezultă imediat că $\frac{A}{B}>\frac{A+k}{B+k}>1$, deci $\log_{B+k}\frac{A}{B}>\log_{B+k}\frac{A+k}{B+k}$, de unde, din tranzitivitate, rezultă $\log_a\frac{A}{B}>\log_{B+k}\frac{A+k}{B+k}$.

Problema 2.
Soluție. a) Notăm $k=\frac{BM}{MC}$, $k>0$. Avem $\overrightarrow{AM}=\frac{k\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{k+1}$ $\Rightarrow$ $(k+1)\cdot\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$, de unde
$(k+1)^2AM^2=k^2AC^2+AB^2+2k\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=k^2b^2+c^2+k\left(b^2+c^2-a^2\right)=\left(k^2+k\right)b^2+(1+k)c^2-ka^2$.
Obținem astfel : $(k+1)^2AM^2=\left(k^2+k\right)b^2+(1+k)c^2-ka^2$ şi analog, încă două relații

$$(k+1)^2BN^2=\left(k^2+k\right)c^2+(1+k)a^2-kb^2$$
$$(k+1)^2CP^2=\left(k^2+k\right)a^2+(1+k)b^2-kc^2.$$

Scăzând relațiile două câte două şi folosind ipoteza rezultă
$\left(k^2+k\right)\left(b^2-c^2\right)+(1+k)\left(c^2-a^2\right)+k\left(b^2-a^2\right)=0$,
$\left(k^2+k\right)\left(c^2-a^2\right)+(1+k)\left(a^2-b^2\right)+k\left(c^2-b^2\right)=0$, respectiv
$\left(k^2+k\right)\left(b^2-a^2\right)+(1+k)\left(c^2-b^2\right)+k\left(c^2-a^2\right)=0$.
Deoarece avem simetrie putem presupune că $a\leq b\leq c$. Atunci $b^2-a^2\geq 0$, $c^2-b^2\geq 0$, $c^2-a^2\geq 0$

şi din a treia relaţie vom avea $b^2-a^2=c^2-b^2=c^2-a^2=0$, de unde rezultă $a=b=c$, aşadar triunghiul ΔABC este echilateral.

b) Relația din enunț este echivalentă cu

$\left|\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}-(1+k)\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BA}-(1+k)\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{CB}-(1+k)\overrightarrow{BA}\right|$, echivalent cu

$\left|\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{AB}\right|$, de unde, prin ridicare la pătrat, avem

$(1+k)^2b^2+k^2a^2+k(1+k)\left(b^2+a^2-c^2\right)=(1+k)^2c^2+k^2b^2+k(1+k)\left(c^2+b^2-a^2\right)=$

$=(1+k)^2a^2+k^2c^2+k(1+k)\left(a^2+c^2-b^2\right)$. La fel ca la punctul precedent se obțin relațiile:

$\left(2k^2+3k+1\right)\left(b^2-c^2\right)+\left(2k^2+k\right)\left(a^2-b^2\right)+\left(k^2+k\right)\left(a^2-c^2\right)=0$,

$\left(2k^2+3k+1\right)\left(c^2-a^2\right)+\left(2k^2+k\right)\left(b^2-c^2\right)+\left(k^2+k\right)\left(b^2-a^2\right)=0$,

$\left(2k^2+3k+1\right)\left(a^2-b^2\right)+\left(2k^2+k\right)\left(c^2-a^2\right)+\left(k^2+k\right)\left(c^2-b^2\right)=0$.

Datorită simetriei putem considera $a\le b\le c$. Atunci ,$b^2-c^2\le 0$, $a^2-b^2\le 0$, $a^2-c^2\le 0$ şi din prima relație rezultă că $b^2-c^2=a^2-b^2=a^2-c^2=0$, de unde rezultă $a=b=c$, aşadar triunghiul ΔABC este echilateral.

Problema 3

Soluție. a) Pentru $n=2$ egalitatea de demonstrat este $\left(a_1-a_2\right)^2=2\cdot\left(a_1^2+a_2^2\right)-\left(a_1+a_2\right)^2$, adevărată. Presupunem inductiv egalitatea adevărată pentru n şi demonstrăm că este adevărată pentru $n+1$, adică $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\left(a_j-a_i\right)^2=(n+1)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_k^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2$. Avem succesiv

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(a_j-a_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_j-a_i\right)^2+\left(a_{n+1}-a_1\right)^2+\left(a_{n+1}-a_2\right)^2+...+\left(a_{n+1}-a_n\right)^2=n\cdot a_{n+1}^2+$$

$$+\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)+n\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2-2\cdot a_{n+1}\cdot\left(a_1+a_2+...+a_n\right)=(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n+1}a_k^2-a_{n+1}^2-$$

$$-2\cdot a_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n+1}a_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2$$, deci şi pentru $n+1$ relația este adevărată.

b) Putem considera $a_1\le a_2\le ...\le a_n$. Fie $m=\min\limits_{1\le i<j\le n}\left(a_j-a_i\right)$, $m\ge 0$, datorită presupunerii făcute.

Pentru $j>i$, avem $a_j-a_i=\left(a_j-a_{j-1}\right)+\left(a_{j-1}-a_{j-2}\right)+...+\left(a_{i+1}-a_i\right)\ge(j-i)\cdot m$, deci $\left(a_j-a_i\right)^2\ge m^2\cdot(i-j)^2$. Deci $\sum\limits_{1\le i<j\le n}\left(a_j-a_i\right)^2\ge m^2\cdot\sum\limits_{1\le i<j\le n}(j-i)^2$, şi utilizând punctul **a)**, obținem

$$n\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\ge m^2\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2\right]$$, de unde, ținând cont că $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=1$, rezultă că

$$n\ge n-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\ge m^2\cdot\left[n\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}-\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\right]=m^2\cdot n^2\cdot\frac{n^2-1}{12}.$$

Aşadar, $n\ge m^2\cdot n^2\cdot\dfrac{n^2-1}{12}$ de unde rezultă că $m^2\le\dfrac{12}{n\cdot\left(n^2-1\right)}$.