Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVII-a
Galaţi , 5 noiembrie 2016

Clasa a XI-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie.
a) Conform formulei binomului lui Newton $(\exists)a_n,b_n\in\mathbb{N}$ astfel încât

$\left(45+\sqrt{2016}\right)^n=a_n+b_n\cdot\sqrt{2016}$ şi $\left(45-\sqrt{2016}\right)^n=a_n-b_n\cdot\sqrt{2016}$ de unde adunând obţinem :

$\left(45+\sqrt{2016}\right)^n=2\cdot a_n-\left(45-\sqrt{2016}\right)^n\Rightarrow\left(45+\sqrt{2016}\right)^n\cdot\pi=2\cdot a_n\cdot\pi-\left(45-\sqrt{2016}\right)^n\cdot\pi$ şi deci

$\sin\left[\left(45+\sqrt{2016}\right)^n\cdot\pi\right]=-\sin\left[\left(45-\sqrt{2016}\right)^n\cdot\pi\right]$. Analog vom avea şi relaţia :

$tg\left[\left(45+\sqrt{2015}\right)^n\cdot\pi\right]=-tg\left[\left(45-\sqrt{2015}\right)^n\cdot\pi\right]$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left[\left(45+\sqrt{2016}\right)^n\cdot\pi\right]}{tg\left[\left(45+\sqrt{2015}\right)^n\cdot\pi\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left[\left(45-\sqrt{2016}\right)^n\cdot\pi\right]}{tg\left[\left(45-\sqrt{2015}\right)^n\cdot\pi\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(45-\sqrt{2016}\right)^n\cdot\pi\right]}{\left[\left(45-\sqrt{2015}\right)^n\cdot\pi\right]}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{45-\sqrt{2016}}{45-\sqrt{2015}}\right)^n=0$$

deoarece fracţia din paranteză este evident subunitară.

b) Folosim proprietăţile cunoscute ale urmei unei matrice pătratice adică :
$Tr(X\cdot Y)=Tr(Y\cdot X)$ şi $Tr(\alpha\cdot X+\beta\cdot Y)=\alpha\cdot Tr(X)+\beta\cdot Tr(Y)$
Evident avem

$$Tr\left[A^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=Tr\left[A^{n+1}\cdot B-A^n\cdot B\cdot A\right]=Tr\left(A^{n+1}\cdot B\right)-Tr\left(A^n\cdot B\cdot A\right)=Tr\left(A^{n+1}\cdot B\right)-Tr\left(B\cdot A^{n+1}\right)=0$$

Înlocuind pe A cu B obţinem $Tr\left[B^n\cdot(B\cdot A-A\cdot B)\right]=0=-Tr\left[B^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]$ de unde evident avem $Tr\left[B^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=0$.

În final avem : $Tr\left[\left(\alpha\cdot A^n+\beta\cdot B^n\right)\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=Tr\left[\alpha\cdot A^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)+\beta\cdot B^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=$

$=\alpha\cdot Tr\left[A^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]+\beta\cdot Tr\left[B^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$

Problema 2.

Soluţie.

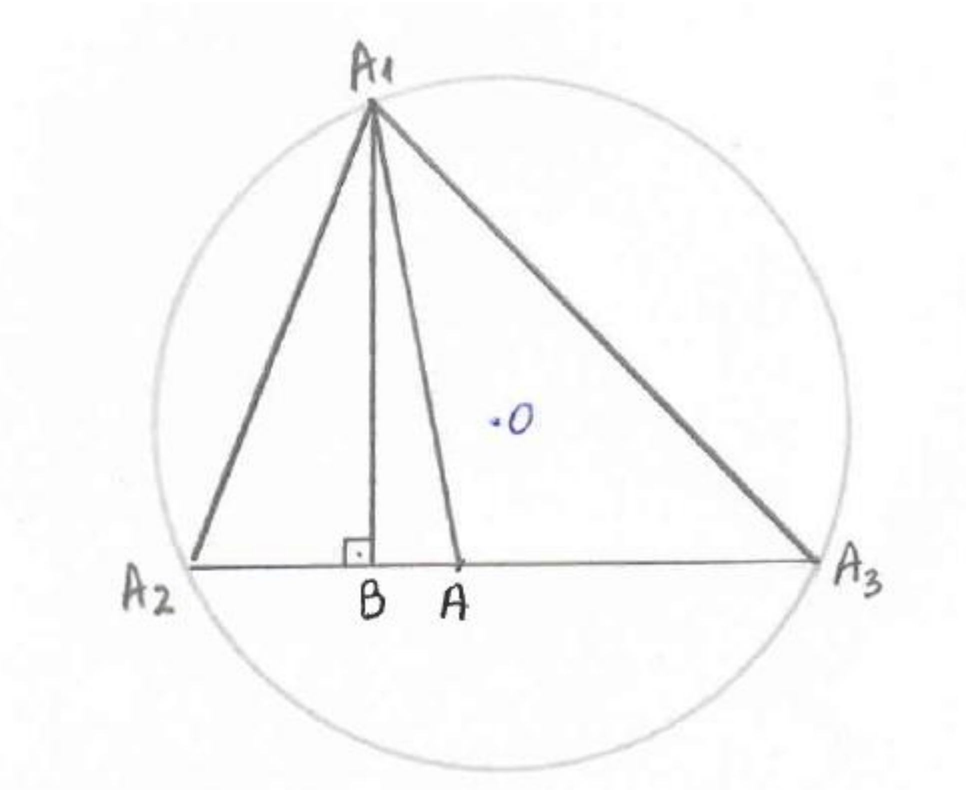
a) Fie A_1, A_2, A_3 imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 și fie $z = a \cdot z_2 + (1-a) \cdot z_3, a \in \mathbb{R}$,iar A imaginea geometrică a lui z . Rezultă imediat că $A \in A_2A_3$.

Notăm cu B piciorul perpendicularei din A_1 pe dreapta A_2A_3. Avem $|A_1A| \geq |A_1B|$ și deci în mod necesar $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} |a \cdot z_2 + (1-a) \cdot z_3 - z_1| = |A_1B| = h$, unde h este lungimea înălţimii triunghiului $\Delta A_1A_2A_3$ corespunzătoare vârfului A_1 .

Pe de altă parte avem $\sigma[\Delta A_1A_2A_3] = \frac{1}{2} \cdot |z_2 - z_3| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \cdot \sin(\sphericalangle A_2A_1A_3)$, de unde obţinem $h = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \cdot \sin(\sphericalangle A_2A_1A_3)}{|z_2 - z_3|}$.

Aplicând teorema sinusurilor rezultă $\frac{|z_2 - z_3|}{\sin(\sphericalangle A_2A_1A_3)} = 2 \cdot r \Rightarrow \sin(\sphericalangle A_2A_1A_3) = \frac{|z_2 - z_3|}{2 \cdot r}$.

Prin urmare $h = \frac{1}{2 \cdot r} \cdot |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|$ ceea ce conduce la concluzia problemei.



b) Calculând termenii de început ai șirurilor găsim că $a_1 = a_6$, $b_1 = b_6$ deci ambele șiruri sunt periodice de perioadă 6. Sirurile vor fi convergente pentru $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ și respectiv $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$ și deci vom avea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_1$.

Fie $a_n = x$ și $b_n = y$, $(\forall) n \geq 1$; va trebui deci să avem : $x = \dfrac{y}{x}$ și $y = \dfrac{y-1}{x-1}$ de unde înlocuind obţinem $x^2 = \dfrac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ dar $x > 1 \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Problema 3

Soluţie. Să presupunem că n se divide cu $n-\varphi(n)$ deci $(\exists) t \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = t\cdot(n-\varphi(n))$ sau

$(t-1)\cdot n = t\cdot\varphi(n)$ .... (1).

Fie $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ sunt factorii primi din descompunerea lui n.
Vom arăta că avem $k=1$. Într-adevăr, să presupunem prin reducere la absurd că avem $k \geq 2$.
Cum $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}\cdot p_2^{\alpha_2-1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k-1}\cdot(p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdot\ldots\cdot(p_k-1)$ relaţia (1) devine după simplificări

$(t-1)\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k = t(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1)$ .... (2) Din această egalitate rezultă că numărul prim p_k divide cel puţin unul din numerele $t, p_1-1, p_2-1,\ldots, p_k-1$ și cum nu poate divide nici unul din numerele $p_1-1, p_2-1,\ldots, p_k-1$ care sunt mai mici ca el rezultă că p_k divide t, adică

$(\exists) u \in \mathbb{N} : t = u\cdot p_k$ .... (3) . Relaţia (2) se mai scrie $\dfrac{t}{t-1} = \dfrac{p_1}{p_1-1}\cdot\dfrac{p_2}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{p_k}{p_k-1}$ de unde avem $1+\dfrac{1}{t-1} = \left(1+\dfrac{1}{p_1-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{p_2-1}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{p_k-1}\right) > \left(1+\dfrac{1}{p_k-1}\right)^k \geq 1+\dfrac{k}{p_k-1}$.

Rezultă $\dfrac{1}{t-1} > \dfrac{k}{p_k-1}$ sau $p_k - 1 > t\cdot k - k \Rightarrow t\cdot k < p_k + k - 1$ ţinând seama și de (3) obţinem $k\cdot u\cdot p_k < p_k + k - 1$ adică $p_k < \dfrac{k-1}{u\cdot k-1} \leq 1$ ceea ce este o contradicţie.

Așadar $k=1$ și atunci $n = p_1^{\alpha_1}$.

Reciproc, dacă $n = p^\alpha$ (cu p număr prim) avem $n-\varphi(n) = p^\alpha - \left(p^\alpha - p^{\alpha-1}\right) = p^{\alpha-1}$ deci n se divide cu $n-\varphi(n)$.