Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVII-a

Galaţi, 5 noiembrie 2016

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 1.

a) i)Ştim că $x\in G \Leftrightarrow |x-k|\geq \frac{1}{k}$. Fie $x,y\in G$. Demonstrăm că $x*y\in G$.

Calculăm $|x*y-k| = k|x-k|\cdot|y-k| \geq k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$, adică $x*y\in G$.

ii) elementul neutru este $e=k+\frac{1}{k}$ şi elemetele simetrizabile sunt $k+\frac{1}{k}, k-\frac{1}{k}$.

iii) Se demonstrează prin inducţie că $\underbrace{x*x*...*x}_{de\ n\ ori} = k^{n-1}\cdot(x-k)^n+k,\quad x\in G$, iar ecuaţia noastră devine: $k^{2015}\cdot(3-k)^{2016}+k=\frac{4^{1008}}{k}+k \Leftrightarrow k^{2016}\cdot(3-k)^{2016}=4^{1008} \Leftrightarrow \left(3k-k^2\right)^{2016}=2^{2016}$

Deci, $\left|3k-k^2\right|=2$ rezultă $k\in\left\{1,2,\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$, dar doar $k=2$ convine.

b) Cum $\frac{1}{f}\in\int f(x)dx \Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=f(x)\Rightarrow$

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=f(x)\Rightarrow f^3(x)=-f(x)\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^3(x)}=-1\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f^2(x)}\right)'=(-x+k)'\Rightarrow$$

$2f^2(x)\cdot(-x+k)=-1$. Din $f(0)=1\Rightarrow 2k=1\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$ şi $f^2(x)=\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{2}+x\right)}=\frac{1}{1+2x}$; I este orice interval care nu conţine pe $-\frac{1}{2}$ şi $f(x)=\sqrt{1+2x}$.

Problema 2

a) Fie şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$. Evident şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător.
Fie $l>0$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} nf(n)=l$. Dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ar fi mărginit superior, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}=0$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{\frac{1}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)f(n+1)=l$, conform lemei lui Stolz-Cesaro, ar rezulta contradicţia $l=0$. Aşadar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit superior, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)=\infty$.

b) Vrem să arătăm că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi mărginit. Pentru aceasta considerăm $n\in\mathbb{N}$ arbitrar fixat.

Conform teoremei lui Lagrange, aplicată funcţiei $F:[n,n+1]\to\mathbb{R}$, există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $F(n+1)-F(n)=f(c_n)$. Atunci, deoarece funcţia *f* este descrescătoare, avem, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n=f(n+1)-f(c_n)\le 0$, deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător (1).

Teorema lui Lagrange împreună cu faptul că funcţia *f* este descrescătoare ne asigură că

$f(2)\le F(2)-F(1)\le f(1)$

.....

$f(n)\le F(n)-F(n-1)\le f(n-1)$,

De unde, prin adunarea acestor relaţii, obţinem

$F(n)\le f(1)+f(2)+...+f(n-1)+F(1)$.

Atunci

$$F(1)\le f(n)+F(1)=x_n+\left[F(n)-F(1)\right]-\left(f(1)+...+f(n-1)\right)+F(1)=$$

$$=x_n+F(n)-\left(f(1)+...+f(n-1)\right)\le x_n+F(1),$$

adică $0\le x_n,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit inferior (2).

Din (1) şi (2) rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Avem că $\dfrac{x_n}{F(n)}=\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{F(n)}-\dfrac{F(n)-F(1)}{F(n)}$ pentru $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Deoarece $F'=f\ge 0$, deducem că *F* este crescătoare, de unde rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)$.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)=\infty$, deoarece în caz contrar, am găsi că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{F(n)}=0$. Atunci, conform relaţiei de mai sus, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{F(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)-F(1)}{F(n)}=1$$

Problema 3

Pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$ notăm $U_m=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z^m=1\right\}$. Se ştie că U_m este unicul subgrup cu m elemente al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

a) Fie $x,y\in G_p=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}U_{p^n}$. Rezultă deci că există $n,r\in\mathbb{N}$ astfel incât $x\in U_{p^n}$ şi $y\in U_{p^r}$. Dacă $m=\max(n,r)$ atunci $x,y\in U_{p^m}$, de unde deducem că $xy^{-1}\in U_{p^m}$. Rezultă că $xy^{-1}\in G_p$, deci G_p este subgrup.

b) Fie $H=G_p$ pentru un număr *p* prim. Dacă *X* este un subgrup al lui *H*, $X\ne H$, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}$ există $u(n)\in\mathbb{N}$ unde $X\cap U_{p^n}=U_{p^{u(n)}}$. Se observă că $u(n)\le n$. Dacă mulţimea $A=\left\{u(n)\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ ar fi nemărginită, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}$ ar exista un $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $n\le u(m)$ şi atunci $U_{p^n}\subset U_{p^{u(m)}}=X\cap U_{p^m}\subseteq X$ şi ar rezulta că $H=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}U_{p^n}\subseteq X$, ceea ce este absurd.

Prin urmare *A* este o mulţime mărginită şi fie $m=\max(A)$. Avem relaţiile

$$X=X\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_{p^n}\right)=\bigcup_{n\ge 0}\left(X\cap U_{p^n}\right)=\bigcup_{n\ge 0}U_{p^{u(n)}}=U_{p^m}.$$

Am arătat că pentru orice p prim, orice subgrup al lui G_p diferit de G_p, este de forma U_{p^n} şi prin urmare este finit.

Reciproc, presupunem că H este subgrup infinit al grupului $\left(\mathbb{C}^*,\cdot\right)$ pentru care orice subgrup al lui H, diferit de H, este finit. Dacă prin absurd, nu există p prim astfel încât $H=G_p$, atunci pentru orice p prim există $n(p)\in\mathbb{N}$ astfel încât $H\cap G_p=U_{p^{n(p)}}$. Dacă $n(p)>1$ pentru o infinitate de numere prime p, fie acestea $p_0,p_1,...$ şi fie $z_0,z_1,...$rădăcini primitive ale unităţii de ordine $p_0^{n(p_0)},p_1^{n(p_1)},...$

Rezultă deci că $X=\left\{z_1^{u_1},...,z_i^{u_i}\mid i\geq 1,u_1,...u_i\in\mathbb{Z}\right\}$ este un subgrup infinit al subgrupului H, deoarece elementele $z_1,z_1z_2,z_1z_2z_3,...$ sunt oricare două distincte (în caz contrar, ar exista $i<j$ astfel încât $z_i...z_j=1$ şi atunci pentru $v=p_{i+1}^{n(p_{i+1})}...p_j^{n(p_j)}$ am avea $z_i^v=1$ şi deoarece $\left(p_i,v\right)=1$ ar rezulta $z_i=1$, contradicţie).

Pe de altă parte, $z_0\notin X$ (dacă prin absurd, $z_0=z_1^{u_1}...z_i^{u_i}$, atunci pentru $w=p_1^{n(p_1)}...p_i^{n(p_i)}$ avem $z_0^w=1$, contradicţie, deoarece $\left(p,w\right)=1$). Obţinem că X este un subgrup infinit al lui H şi $X\neq H$, contradicţie.

Prin urmare doar un număr finit de $n(p)$ sunt diferite de 1, fie acesta $n(p_1)...n(p_t)$.

Vom arăta că $H=\left\{z_1^{u_1}...z_t^{u_t}\mid 0\leq u_i\leq n(p_t)\cdot u_t\in\mathbb{Z},1\leq i\leq t\right\}$ şi de aici va rezulta că este finit. Adică o contradicţie. Incluziunea "$\supseteq$"este evidentă. Fie acum $g\in H,g\neq 1$. Dacă nu există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $g^n=1$, atunci $X=\left\{g^i\mid i\in\mathbb{Z}\right\}$ este un subgrup infinit al lui H şi $X\neq H$ (deoarece $g\notin X$) ceea ce este o contradicţie. Rezultă că există un astfel de n şi presupunem că am ales cel mai mic astfel de număr (g este rădăcină primitivă de ordin n a unităţii). Pentru orice număr prim p şi $u\in\mathbb{N}^*$ cu p^u divide n, avem $1\neq g^{n/p^u}\in H$. Deoarece g^{n/p^u} este rădăcină primitivă a unităţii de ordin p^u, rezultă că p este unul din numerele $p_1,p_2,...p_t$ şi $u\leq n(p)$. Rezultă că g este o rădăcină primitivă a unităţii de ordin $p_1^{n(p_1)}...p_t^{n(p_t)}$ pentru nişte numere $u_i\leq n(p_1),...,u_i\leq n(p_i)$. Se observă că $z_1...z_t$ este rădăcină de ordin $p_1^{n(p_1)}...p_t^{n(p_t)}$ şi atunci există $u\in\mathbb{Z}$ astfel încât $g=z_1^u...z_t^u$. Cu aceasta problema este rezolvată.