Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVII-a

Galaţi, 5 noiembrie 2016

Clasa a VII-a

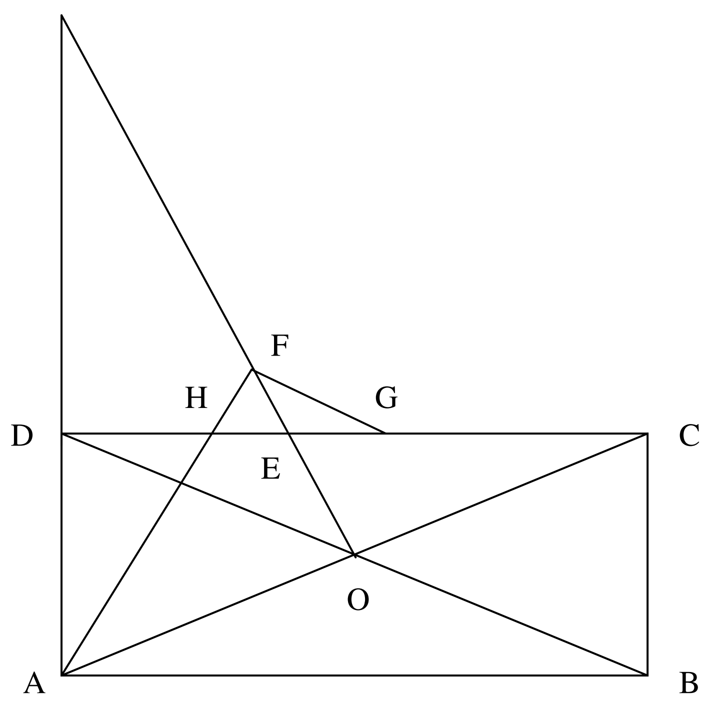
SOLUŢII

Problema 1.

Soluție. a) În triunghiul $\triangle HFG$, unghiurile $\widehat{FHG}$ și $\widehat{FGH}$ sunt complementare; de asemenea în triunghiul $\triangle DHA$, sunt complementare unghiurile $\widehat{DAH}$ si $\widehat{DHA}$. Ținând cont că unghiurile $\widehat{DHA}$ și $\widehat{FHG}$ sunt opuse la vârf, rezultă că unghiurile $\widehat{DAH}$ și $\widehat{FGH}$ sunt congruente. În triunghiul $\triangle FAO$ suma măsurilor unghiurilor $\widehat{FAO}$ și $\widehat{AFO}$ fiind egală cu 90^o, iar unghiul $\widehat{HFE}$ complementar cu unghiul $\widehat{EFG}$, se obține că unghiurile $\widehat{EFG}$ și $\widehat{EGF}$ sunt congruente, de unde rezultă faptul că triunghiul $\triangle EFG$ este isoscel.

Deoarece unghiurile $\widehat{HFE}$ și $\widehat{FHE}$ sunt congruente, rezultă că triunghiul $\triangle EHF$ este isoscel, și deci $[EH] \equiv [EF]$; dar $[EG] \equiv [EF]$ și, prin urmare, $[HE] \equiv [EG]$.

b) Din faptul că $FG \parallel DB$, rezultă $\widehat{DGF} \equiv \widehat{BDC}$ (unghiuri alterne interne), iar din relația $AB \parallel DC$, considerând secanta DB, rezultă $\widehat{CDB} \equiv \widehat{DBA}$ (unghiuri alterne interne). Prin urmare, $\widehat{DGF} \equiv \widehat{BDC} \equiv \widehat{BAC}$, dar cum $\widehat{DGF} \equiv \widehat{DAF}$, va rezulta că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAF} \equiv \widehat{FAD}$. În plus, $m\left(\widehat{BAC}\right) + m\left(\widehat{CAF}\right) + m\left(\widehat{FAD}\right) = 90^0$, de unde rezultă că $m\left(\widehat{BAC}\right) = 30^0$ și, deci $m\left(\widehat{DAC}\right) = 60^0$.



Problema 2.

Soluţie. a) Condiție de existență: $c \neq 9$

Dacă $a \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{3}+1+1 \Leftrightarrow \overline{a,b(c)}<\frac{7}{3}$, contradicție.

Dacă $a=2$, iar cel puțin unul dintre numerele *b* sau *c* este cel puțin egal cu 3, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{2}+1+\frac{1}{3} \Leftrightarrow a,b(c) \leq \frac{11}{6}$, contradicție. Se observă prin verificare directă că dacă $b \in \{1;2\}$ nu se obțin soluții.

Dacă $a=1 \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\overline{0,b(c)} \Leftrightarrow 90(b+c)=bc(9b+c) \Rightarrow 9 \mid bc(9b+c) \Leftrightarrow 9 \mid 9b^2c+bc^2 \Rightarrow 9 \mid bc^2$.

Dacă 3 nu divide *c*, atunci $9 \mid b$, deci $b=9$ și relația de mai sus devine $10(9+c)=c(81+c)$, care nu are soluții.

Dacă $3 \mid c \Rightarrow c \in \{3;6;9\}$; dar cum $c \neq 9 \Rightarrow c \in \{3;6\}$

Pentru $c=3$ se obține soluția $b=5$, iar pentru $c=6$ nu se obțin soluții.

Deci, singura soluție este tripletul $(1;5;3)$.

b) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, din faptul că a este număr par, rezultă că $a^{2\cdot n} \vdots 4$, iar din faptul că b este număr natural impar, rezultă că b este de forma $M_4 \pm 1$, aşadar $b^{2\cdot n}$ va fi de forma M_4+1. Va rezulta că $a^{2\cdot n}-b^{2\cdot n}=M_4-(M_4+1)=M_4+3$, adică $(x-2016)^2=M_4+3$, fals, deoarece nu există pătrate perfecte de această formă. Dacă $n=0$, atunci se obţine $(x-2016)^2=0$, de unde rezultă că $x=2016$. Aşadar $n=0$ iar $x=2016$.

Problema 3

Soluţie. a) Împărţim (partiţionăm) suprafaţa pătratului în $2016=42\cdot 48$ dreptunghiuri congruente, fiecare dreptunghi având dimensiunile $\frac{a}{42}$, respectiv $\frac{a}{48}$, unde $a=4\,\text{cm}$ reprezintă lungimea laturii pătratului. Conform principiului cutiei, vor exista cel puţin două puncte situate pe suprafaţa unui astfel de dreptunghi. Distanţa dintre ele va fi maxim lungimea diagonalei dreptunghiului, iar din inegalitatea triunghiulară va rezulta că lungimea acesteia este mai mică decât $\frac{a}{42}+\frac{a}{48}=\frac{2}{21}+\frac{1}{12}=\frac{15}{84}<\frac{1}{5}$ centimetri.

b) Demonstrăm că suprafaţa pătratului poate fi partiţionată în $4+2\cdot 2016=4036$ triunghiuri. Considerăm un punct interior al pătratului. Unit cu cele 4 vârfuri determină o partiţie a pătratului în 4 triunghiuri. Fie acum un alt punct interior din cele 2016 rămase. Avem două cazuri:

1) Punctul se află în interiorul unuia din cele 4 triunghiuri. Atunci acel triunghi este partiţionat în trei triunghiuri şi deci numărul total de triunghiuri care partiţionează acum pătratul este 6

2) Punctul se află pe una din laturile celor 4 triunghiuri. Atunci , unindu-l cu cele două vârfuri ale triunghiurilor pe ale căror latură comună se află, se vor obţine 4 noi triunghiuri în loc de cele două (fiecare din cele două triunghiuri adiacente este partiţionat în două triunghiuri).

În ambele cazuri, numărul de triunghiuri care partiţionează pătratul creşte cu doi. Continuând procedeul, vom obţine $4+2\cdot 2016=4036$ suprafeţe tringhiulare cu suma ariilor egală cu aria pătratului, adică $16\,\text{cm}^2$. Va exista un triunghi printre cele 4036 cu aria cel mult egală cu $\frac{16}{4036}=\frac{4}{1009}\text{cm}^2$.