Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Filiala Galaţi**

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri” — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XVII-a
Galaţi, 5 noiembrie, 2016

Clasa a IX-a

SOLUŢII

Problema 1.Soluție:

a) Notăm $x-2016=a, [x]=b, \{x\}+2016=c$ și obținem $a+b+c=2x$. Atunci ecuația devine:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=abc \leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

i) $a=-b \leftrightarrow x-2016=-[x] \leftrightarrow \{x\}=-2[x]+2016 \in [0;1)\cap\mathbb{Z} \rightarrow [x]=1013$ și $\{x\}=0$, deci $x=1008$;

ii) $a=-c \leftrightarrow x-2016=-\{x\}-2016 \leftrightarrow 2\{x\}=-[x]\in[0;2)\cap\mathbb{Z}^* \rightarrow [x]=-1$ și $\{x\}=\frac{1}{2}$, rezultă $x=-\frac{1}{2}$;

iii) $b=-c \leftrightarrow [x]=-\{x\}-2016 \leftrightarrow \{x\}=-2016-[x]\in[0;1)\cap(\mathbb{Z}\backslash\{2016\})$ $[x]=-2016$ și $x=-2016$.

În concluzie, A=$\left\{-2016;-\frac{1}{2};1008\right\}$.

b) Dacă $x,y\in\mathbb{Z}$ atunci există $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât $2017x+2016y=p$ și obținem $2016x+2015y=p^n$

Rezolvăm în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sistemul :

$$\begin{cases}2017x+2016y=p\\2016x+2015y=p^n\end{cases}$$

Reducem y și obținem $(2017\cdot2015-2016^2)x=2015p-2016p^n$

Calculăm $(2017\cdot2015-2016^2)=(2016+1)(2016-1)-2016^2=-1$

Soluția sistemului este $(x,y)\in\{(2016p^n-2015p\,;2016p-2017p^n)\ |\ p\in\mathbb{Z}\}$

Problema 2.Soluție:

a)Demonstrăm prin inducție după $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

Pentru

$$n=2\ ,\qquad \frac{a^2}{x^1}+\frac{b^2}{y^1}\geq\frac{(a+b)^2}{(x+y)^1} \leftrightarrow (ay-bx)^2\geq 0$$

Egalitatea se realizează pentru

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$$

Presupunem inegalitatea adevărată pentru n și demonstrăm

$$\frac{a^{n+1}}{x^n}+\frac{b^{n+1}}{y^n}\geq\frac{(a+b)^{n+1}}{(x+y)^n}$$

Din ipoteza inductivă obținem:

$$\frac{a^{n+1}}{x^n}=\frac{a^n}{x^{n-1}}\frac{a}{x}\geq\frac{a}{x}\frac{(a+b)^n}{(x+y)^{n-1}}-\frac{a}{x}\frac{b^n}{y^{n-1}}$$

Adunăm termenul $\frac{b^{n+1}}{y^n}$ și obținem:

$$\frac{a^{n+1}}{x^n}+\frac{b^{n+1}}{y^n}\geq\frac{a}{x}\frac{(a+b)^n}{(x+y)^{n-1}}-\frac{a}{x}\frac{b^n}{y^{n-1}}+\frac{b^{n+1}}{y^n}$$

Vom arăta că

$$\frac{a}{x}\frac{(a+b)^n}{(x+y)^{n-1}}-\frac{a}{x}\frac{b^n}{y^{n-1}}+\frac{b^{n+1}}{y^n}\geq\frac{(a+b)^{n+1}}{(x+y)^n}$$

Ceea ce revine la:

$$\frac{(a+b)^n}{(x+y)^{n-1}}\left(\frac{a}{x}-\frac{a+b}{x+y}\right)+\frac{b^n}{y^{n-1}}\left(\frac{bx-ay}{xy}\right)\geq 0$$

$$\frac{(a+b)^n}{(x+y)^{n-1}}\frac{ay-bx}{x(x+y)}-\frac{b^n(ay-bx)}{xy^n}\geq 0$$

$$\frac{ay-bx}{x}\left[\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^n-\left(\frac{b}{y}\right)^n\right]\geq 0 \ \leftrightarrow \ \frac{ay-bx}{x}\left(\frac{a+b}{x+y}-\frac{b}{y}\right)\left[\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^{n-1}+\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^{n-2}\frac{b}{y}+\cdots+\left(\frac{b}{y}\right)^{n-1}\right]$$

$$\frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}\left[\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^{n-1}+\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^{n-2}\frac{b}{y}+\cdots+\left(\frac{b}{y}\right)^{n-1}\right]\geq 0$$

adevărată, cu egalitate pentru

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$$

obs . Inegalitatea se poate demonstra folosind convexitatea funcției putere pe intervalul $(0;\infty)$
Prelucrăm inegalitatea în forma:

$$\left(\frac{a}{a+b}\frac{x+y}{x}\right)^n\frac{x}{x+y}+\left(\frac{b}{a+b}\frac{x+y}{y}\right)^n\frac{y}{x+y}\geq 1=\left(\frac{a}{a+b}\frac{x+y}{x}\frac{x}{x+y}+\frac{b}{a+b}\frac{x+y}{y}\frac{y}{x+y}\right)^n$$

b) Generalizăm inegalitatea de la punctul a) și o demonstrăm prin inducție după k:

$$a_1,a_2,\dots,a_k>0\ ,x_1,x_2,\dots,x_k>0\ ,n,k\in\mathbb{N},n,k\geq 2$$

$$\frac{a_1^n}{x_1^{n-1}}+\frac{a_2^n}{x_2^{n-1}}+\cdots+\frac{a_k^n}{x_k^{n-1}}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n}{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n-1}}\quad (1)$$

Pentru k=2 inegalitatea este verificată la punctul a) și pentru k+1 avem

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i^n}{x_i^{n-1}}\geq\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^n}{x_i^{n-1}}+\frac{a_{k+1}^n}{x_{k+1}^{n-1}}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n}{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n-1}}+\frac{a_{k+1}^n}{x_{k+1}^{n-1}}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})^n}{(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})^{n-1}}$$

Egalitatea are loc pentru

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}$$

În inegalitatea (1) alegem k=n , $x_i=S-a_i\ ,i=1,2,\dots,n\ unde\ S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ și obținem inegalitatea propusă. Egalitatea se realizează pentru

$$a_1=a_1=\cdots=a_n=\frac{S}{n}$$

Problema 3.Soluție:

Vom demonstra prin inducție.

Dacă n=1 atunci există $a_1=1+1!\left(1+\frac{1}{1!}\right)=3$ puncte necoliniare cu segmentele care le unesc colorate cu o singură culoare.

Presupunem că pentru oricare a_n puncte, oricare trei necoliniare,cu segmentele determinate de ele colorate cu n culori, există un triunghi cu laturile de aceeași culoare. Vom alege a_{n+1} puncte, oricare trei necoliniare, cu segmentele ce le unesc colorate cu n+1 culori.

Scriem $a_{n+1}=1+(n+1)\left[n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]+1=1+(n+1)(a_n-1)+1.$

Alegem, arbitrar, din cele a_{n+1} puncte un punct pe care-l notăm P. Punctul P este unit cu cele $a_{n+1}-1$ puncte rămase prin segmente colorate în n+1 feluri, deci există $a_{n+1}-1$ segmente de n+1 culori. Pentru că

$a_{n+1} - 1 = (n+1)(a_n - 1) + 1$ avem tot atâtea muchii colorate în n+1 moduri și atunci, conform principiului lui Dirichlet, există a_n laturi la fel colorate .(În caz contrar, numărul segmentelor care pornesc din P ar fi cel mult $(n+1)(a_n - 1)$,fals.)

Fie aceste segmente $(PP_1), (PP_2), \dots, (PP_{a_n})$ colorate cu culoarea ”I”. Analizăm două cazuri:

- Unul din segmentele $(P_i P_J)$ $i \neq j$, $i, j = 1,2, \dots, a_n$ este colorat cu culoarea ”I”. Atunci triunghiul PP_iP_j este colorat cu culoarea ”I” și problema este rezolvată.
- Niciunul din segmentele $(P_i P_J)$ $i \neq j$, $i, j = 1,2, \dots, a_n$ nu este colorat cu culoarea ”I”. Atunci există a_n puncte $P_1, P_2, \dots, P_{a_n}$ colorate cu n culori și, conform ipotezei inductive, ele determină cel puțin un triunghi cu laturile la fel colorate.