Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XVII-a
Galaţi, 5 noiembrie 2016

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Fie $k \in (1,+\infty)$ şi $G = \left(-\infty, \frac{k^2-1}{k}\right] \cup \left[\frac{k^2+1}{k}, +\infty\right)$. Se consideră operaţia

$x * y = k \cdot x \cdot y - k^2(x+y) + k^3 + k, (\forall) x, y \in G$.

i) Arătaţi că "$*$" e lege de compoziţie internă pe G

ii) Studiaţi existenţa elemenului neutru şi a elementelor simetrizabile

iii) Să se determine k dacă $\underbrace{3*3*...*3}_{de\ 2016\ ori} = \frac{4^{1008}}{k} + k,\ k \in (1,\infty)$

b) Să se determine funcţia continuă $f : I \to (0,+\infty)$ şi intervalul $I \subset \mathbb{R}$ ştiind că $f(0) = 1$ şi $\frac{1}{f} \in \int f(x)dx$.

Problema 2.

Fie $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ o funcţie descrescătoare şi continuă astfel încât şirul $(nf(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limită diferită de zero.

a) Să se arate că $\lim_{n\to\infty}(f(1) + f(2) + ... + f(n)) = \infty$.

b) Să se arate că dacă F este o primitivă a lui f, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) - (F(n) - F(1))$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty}\frac{f(1) + f(2) + ... + f(n)}{F(n)} = 1$

Problema 3.

a) Pentru un număr natural $p \geq 2$ notăm $G_p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1\right\}$. Să se arate că G_p este un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

b) Fie *H* un subgrup infinit al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Să se arate că orice subgrup al lui *H*, diferit de *H*, este finit dacă şi numai dacă există *p* prim cu $H = G_p$.

Probleme selectate de **Veronica Grigore, Romeo Zamfir, profesori, Galaţi**