Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național ”Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică ”Cristian S. Calude”
ediția a XVIII-a
Galați, 4 noiembrie 2017

Clasa a XI –a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. **a)** Notăm cu y, z, t, u limitele subșirurilor.Considerăm subșirul $(x_{6\cdot n})_n$ care este în același timp subșir în $(y_n)_n$ și subșir în $(z_n)_n$ deci el este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2\cdot n} = y$ și totodată $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3\cdot n} = z$ deci $y = z$.

Considerăm subșirul $(x_{6\cdot n+2})_n$ și obținem $y = u$. Considerăm subșirul $(x_{6\cdot n+4})_n$ și avem $y = t$.

In concluzie $y = z = t = u$ și cum subșirurile $(z_n)_n, (t_n)_n, (u_n)_n$ acoperă tot șirul $(x_n)_n$ rezultă că șirul $(x_n)_n$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ unde $x = y = z = t = u$.

b) Convergenţa a oricare trei din cele patru subșiruri nu asigură convergenţa șirului $(x_n)_n$ și vom dovedi asta prin contraexemple.

1) Dacă $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ și $(t_n)_n$ sunt convergente luăm șirul $(x_n)_n$ definit astfel $x_{6\cdot n} = x_{6\cdot n+1} = x_{6\cdot n+2} = x_{6\cdot n+3} = x_{6\cdot n+4} = 0$ și $x_{6\cdot n+5} = 1$ (evident divergent) și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$

2) Dacă $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ și $(u_n)_n$ sunt convergente alegem $x_{6\cdot n} = x_{6\cdot n+2} = x_{6\cdot n+3} = x_{6\cdot n+4} = x_{6\cdot n+5} = 0$ și $x_{6\cdot n+1} = 1$și avem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3) Dacă $(y_n)_n$, $(t_n)_n$și $(u_n)_n$ sunt convergente alegem $x_{6\cdot n} = x_{6\cdot n+1} = x_{6\cdot n+2} = x_{6\cdot n+4} = x_{6\cdot n+5} = 0$ și $x_{6\cdot n+3} = 1$ și avem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

4) Dacă $(z_n)_n$, $(t_n)_n$ și $(u_n)_n$ sunt convergente luăm $x_{3\cdot n} = 0$, $x_{3\cdot n+1} = 1$, $x_{3\cdot n+2} = 2$ și avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3\cdot n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3\cdot n+1} = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3\cdot n+2} = 2$ dar evident că șirul $(x_n)_n$ nu este convergent.

Problema 2.
Soluție.

a) Dacă $|z|\geq 1$ inegalitatea din enunţ este adevărată. Considerăm $|z|<1$.

Luăm $z=x+i\cdot y;$ cu $x,y\in\mathbb{R},|z|=r<1$. Relaţia din cerinţă devine:

$$x^2+y^2+2\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}\geq 1\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}\geq 1-\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot r^2-8\cdot x+4\geq 1-2\cdot r^2+r^4\Leftrightarrow -r^4+6\cdot r^2+3\geq 8\cdot x \text{ ....(1)}$$

Vom demonstra : $-r^4+6\cdot r^2+3\geq 8\cdot r$ ....(2) și din aceasta va rezulta (1).

Ultima inegalitate este echivalentă cu $r^4-6\cdot r^2+8\cdot r-3\leq 0\Leftrightarrow (r-1)^3\cdot(r+3)\leq 0$ adevărată pentru $|z|<1$.

b) **I** Dacă $u+v=0\Rightarrow u=-v$.

Din prima condiţie rezultă $u\cdot v=-1\Rightarrow u^2=1\Rightarrow u=\pm 1$. Dacă $u=1\Rightarrow v=-1$ concluzia satisfăcută și invers.

II Dacă $u+v\neq 0$ atunci avem $\left|\dfrac{u\cdot v+1}{u+v}\right|=1$ și notăm cu $z=\dfrac{u\cdot v+1}{u+v}$.

Avem $3|u+v+uv+1|=|uv+5(u+v)+1|$ și împărţind prin $|u+v|$ obţinem:

$$3|z+1|=|z+5|\Leftrightarrow 9(z+1)\left(\bar{z}+1\right)=(z+5)\left(\bar{z}+5\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18+9\left(z+\bar{z}\right)=26+5\left(z+\bar{z}\right)\Leftrightarrow 4\left(z+\bar{z}\right)=8\Rightarrow z+\bar{z}=2\Rightarrow x=1$$

deci $z=1\Rightarrow uv+1=u+v\Leftrightarrow (u-1)(v-1)=0\Rightarrow u=1$ sau $v=1$ și concluzia se verifică.

Problema 3.

Soluție. Pentru $m\in\mathbb{N}$ și $n\in\mathbb{Z}^*$ avem $\left|f\left(\dfrac{m}{n}\right)-f(0)\right|=$

$$=\left|f\left(\frac{m}{n}\right)-f\left(\frac{m-1}{n}\right)+f\left(\frac{m-1}{n}\right)-f\left(\frac{m-2}{n}\right)+f\left(\frac{m-2}{n}\right)-...+f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right|\leq$$

$$\leq\left|f\left(\frac{m}{n}\right)-f\left(\frac{m-1}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{m-1}{n}\right)-f\left(\frac{m-2}{n}\right)\right|+...+\left|f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{n^2}=\frac{m}{n^2}$$

Luăm $x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}, p\in\mathbb{N}$ și $k\in\mathbb{N}^*$ și conform relaţiei anterioare avem :

$$|f(x)-f(0)|=\left|f\left(\frac{k\cdot p}{k\cdot q}\right)-f(0)\right|\leq\frac{k\cdot p}{k^2\cdot q^2}=\frac{p}{k\cdot q^2}$$

Am obţinut $\left|f\left(\dfrac{p}{q}\right)-f(0)\right|\leq\dfrac{p}{k\cdot q^2},\forall k\in\mathbb{N}^*$ ....(1)

Vom demonstra în continuare că $|x|<\varepsilon,\forall\varepsilon>0\Rightarrow x=0$ ....(2)

Intr-adevăr, dacă presupunem că $x\neq 0$ luând $\varepsilon=\dfrac{|x|}{2}$ obţinem $|x|<\dfrac{|x|}{2}\Rightarrow 2<1$ fals.

Notăm acum cu $A = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(0)$. Arătăm că $|A| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Fie $\varepsilon > 0$ și căutăm k natural nenul astfel încât $\frac{p}{k \cdot q^2} < \varepsilon \Leftrightarrow p < k \cdot \varepsilon \cdot q^2 \Leftrightarrow k > \frac{p}{\varepsilon q^2}$. Luăm ,de exemplu , $k = \left[\frac{p}{\varepsilon q^2}\right] + 1$.

Folosind observaţia anterioară vom obţine $A = 0 \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = f(0)$.

In concluzie singurele funcţii care satisfac cerinţa problemei sunt funcţiile constante.