Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional ”Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Cristian S. Calude”
ediţia a XVIII-a
Galaţi, 4 noiembrie 2017

Clasa a VIII –a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. **a)** $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{3}{4}-\frac{1}{n}<\frac{3}{4}$

b) Din inegalitatea mediilor $m_g \le m_a$.

$\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+...+\sqrt{n(n+1)}<\frac{1+2}{2}+\frac{2+3}{2}+\frac{3+4}{2}+...+\frac{n+(n+1)}{2}=\frac{1+(n+1)+2\cdot(2+3+...+n)}{2}=$

$\frac{n+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{2}=\frac{n+n(n+1)}{2}=\frac{n(n+2)}{2}$

Problema 2.

Soluţie. **a)** $EMB \equiv MBC$ (alterne interne)

$[BM$ bisectoarea $ABC \Rightarrow EBM \equiv MBC$. Rezultă ΔEMB isoscel, deci $[EM]\equiv[EB]$.

$FNC \equiv NCB$ (alterne interne)

$[CN$ bisectoarea $ACB \Rightarrow FCN \equiv NCB$. Rezultă ΔNFC isoscel, deci $[NF]\equiv[FC]$.

$[EF]$ linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow BC = 2\cdot EF$

$AB+AC=2\cdot EB+2\cdot FC=2\cdot EM+2\cdot NF=2\cdot(EF+MN)=2\cdot EF+2\cdot MN=BC+2\cdot MN$

b) $\frac{A_{[APQ]}}{A_{[ABC]}}=\frac{AP\cdot AQ}{AC\cdot AB}$

$\frac{A_{[POQ]}}{A_{[BOC]}}=\frac{PO\cdot OQ}{BO\cdot OC}$

$A_{[BOC]}=\frac{1}{2}A_{[ABC]}$. Rezultă că $\frac{2\cdot A_{[POQ]}}{A_{[ABC]}}=\frac{PO\cdot OQ}{BO\cdot OC}$.

Relaţia din enunţ este echivalentă cu : $\frac{AP\cdot AQ}{AC\cdot AB}=\frac{PO\cdot OQ}{BO\cdot OC}$.

ΔACQ

$B-O-P$ transversală, rezultă din teorema lui Menelaus că: $\frac{AP}{CP}\cdot\frac{CO}{QO}\cdot\frac{QB}{AB}=1$ $\boxed{1}$

ΔABP

$C-O-Q$ transversală, rezultă din teorema lui Menelaus că: $\frac{AQ}{BQ}\cdot\frac{BO}{PO}\cdot\frac{PC}{AC}=1$ $\boxed{2}$

Înmulţim $\boxed{1}$ cu $\boxed{2}$ şi rezultă $\frac{AP\cdot AQ}{AC\cdot AB}\cdot\frac{CO\cdot BO}{QO\cdot PO}=1$

Problema 3.
Soluţie.

a) $xy=50x+50y-1009 \Leftrightarrow xy-50x-50y+2500=1491 \Leftrightarrow$

$(x-50)\cdot(y-50)=1491 \Leftrightarrow (x-50)\cdot(y-50)=21\cdot 71$

$0\le x\le 100 \Rightarrow -50\le x-50\le 50$

$0\le y\le 100 \Rightarrow -50\le y-50\le 50$

Numărul 71 este prim, rezultă că sau $x-50$ sau $y-50$ trebuie să se dividă la 71.
Deci, $x-50$ sau $y-50$ este egal cu 0. Rezultă că ecuaţia nu are soluţii.

b) Presupunem că pe linia i am schimbat semnul de x_i ori şi în coloana k de y_k ori. Atunci în căsuţa situată la intersecţia liniei i cu coloana k semnul se va schimba de x_i+y_k ori. Prin urmare, în această căsuţă semnul va fi minus atunci când x_i+y_k este impar.Astfel numărul total de minusuri în tabloul obţinut va depinde numai de paritatea numerelor x_i şi y_k.
Fie x numărul numerelor impare printre x_i şi y numărul numerelor impare printre y_k.
Atunci numărul total al minusurilor din tablou va fi egal cu:
$x\cdot(100-y)+(100-x)\cdot y=100x+100y-2xy$, unde $x, y\in\mathbb{N}$.

Presupunem că se pot obţine 2018 de minusuri.
Atunci $2018=100x+100y-2xy \Rightarrow$

$xy-50x-50y+2500=1491$. Contradicţie

Nu se pot obţine exact 2018 de minusuri.