Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XVIII-a
Galați, 4 noiembrie 2017

Clasa a 9–a

SOLUȚII

Problema 1. a) Fie $a,b,c\in(0;+\infty)$. Să se demonstreze că

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{3}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot(a+b+c).$$

b) Fie $a,b,c,d\in(0;+\infty)$. Să se demonstreze că

$$\frac{a}{a+2\cdot b}+\frac{b}{2\cdot a+b}+\frac{c}{c+2\cdot d}+\frac{d}{2\cdot c+d}\geq\frac{4}{3}.$$

Gazeta Matematică, nr. 9 / 2017

Soluție. a) Înmulțind cu 3 inecuația și efectuând calculele obținem:

$2a^3+2b^3+2c^3\geq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$, inegalitate pe care o notăm cu (1).

Demonstrăm mai întâi că $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$, pentru orice $a,b\in(0;+\infty)$. Avem că:

$a^3+b^3\geq a^2b+ab^2\Leftrightarrow a^3-a^2b+b^3-ab^2\geq 0\Leftrightarrow a^2\cdot(a-b)-b^2\cdot(a-b)\geq 0\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)\cdot(a-b)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)^2\cdot(a+b)\geq 0$, ceea ce este adevărat pentru orice $a,b\in(0;+\infty)$.

La fel se deduc și relațiile $b^3+c^3\geq b^2c+bc^2$ și $c^3+a^3\geq c^2a+ac^2$, pentru orice $a,b,c\in(0;+\infty)$.

Adunând membru cu membru inegalitățile $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$, $b^3+c^3\geq b^2c+bc^2$ și $c^3+a^3\geq c^2a+ac^2$ obținem inegalitatea (1), echivalentă cu cea din enunț.

b) Înmulțind cu 3 inegalitatea și scăzând 1 din fiecare fracție obținem:

$\frac{2(a-b)}{a+2\cdot b}+\frac{2(b-a)}{2\cdot a+b}+\frac{2(c-d)}{c+2\cdot d}+\frac{2(d-c)}{2\cdot c+d}\geq 0$, inegalitate pe care o notăm cu (*).

$$\frac{2\cdot(a-b)}{a+2\cdot b}+\frac{2\cdot(b-a)}{2\cdot a+b}=2\cdot(a-b)\cdot\left(\frac{1}{a+2\cdot b}-\frac{1}{2\cdot a+b}\right)\geq 0=2\cdot(a-b)\cdot\frac{a+2\cdot b-2\cdot a-b}{(a+2\cdot b)\cdot(2\cdot a+b)}\geq 0=$$

$=2\cdot\frac{(a-b)^2}{(a+2\cdot b)\cdot(2\cdot a+b)}\geq 0$, pentru orice $a,b\in(0;+\infty)$.

Analog se demonstrează $\frac{2\cdot(c-d)}{c+2\cdot d}+\frac{2\cdot(d-c)}{2\cdot c+d}\geq 0$, pentru orice $c,d\in(0;+\infty)$.

Adunând inegalitățile $\frac{2\cdot(a-b)}{a+2\cdot b}+\frac{2\cdot(b-a)}{2\cdot a+b}\geq 0$ și $\frac{2\cdot(c-d)}{c+2\cdot d}+\frac{2\cdot(d-c)}{2\cdot c+d}\geq 0$, obținem inegalitatea (*), care este echivalentă cu inegalitatea din enunț.

Problema 2. a) Fie $ABCD$ un trapez, $AD\parallel BC$, punctul M este mijlocul segmentului $[DC]$, $AM\cap BD=\{O\}$. Picioarele perpendicularelor duse din A și C pe BD sunt A', respectiv C'. Să se demonstreze că $\frac{DO}{BO}=\frac{AA'}{AA'+CC'}$.

b) Fie ABC un triunghi isoscel cu $m(\sphericalangle BAC) = 120^0$, iar $[CD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$, $D \in AB$, punctele A' și D' sunt proiecțiile ortogonale ale punctului A, respectiv D pe BC. Să se demonstreze că $[DD'] \equiv [A'D']$.

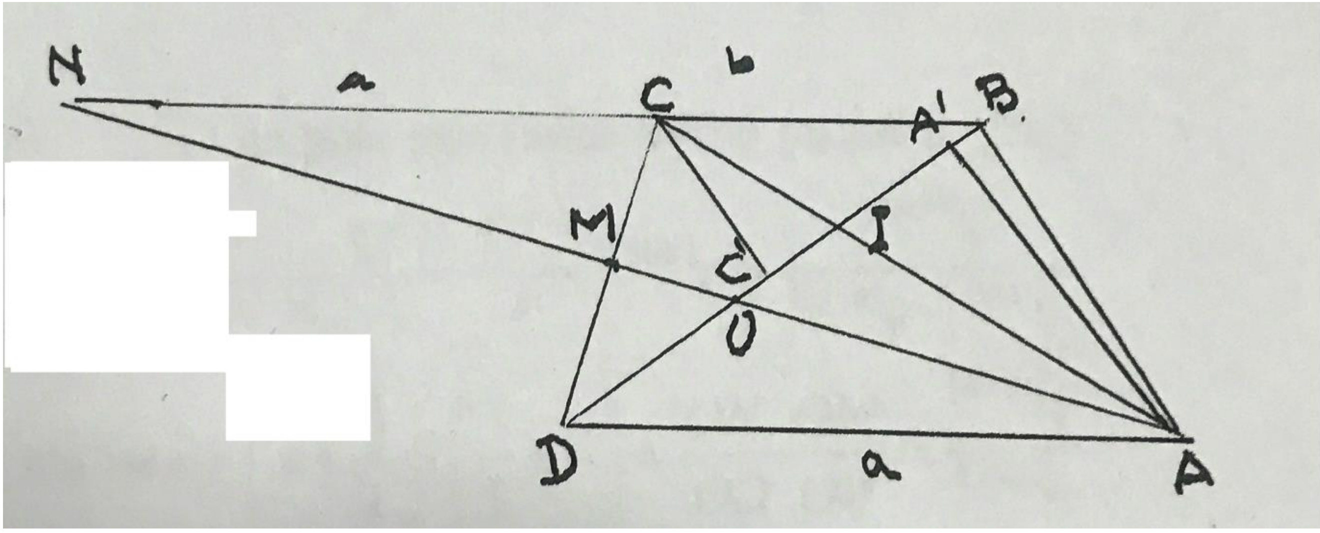
Vasile Popa

c) Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ puncte mobile, iar $MC \cap NB = \{O\}$. Demonstrați că raportul $\dfrac{A_{[AMN]} \cdot A_{[BOC]}}{A_{[MON]}}$ este constant.

(Am notat cu $A_{[XYZ]}$ aria triunghiului XYZ)

***

Soluție. a) Fie $\{N\} = AM \cap BC$ și $\{I\} = AC \cap BD$. Avem că $\Delta MDA \equiv \Delta MCN$, cazul de congruență este U.L.U. Rezultă că $[NC] \equiv [AD]$.



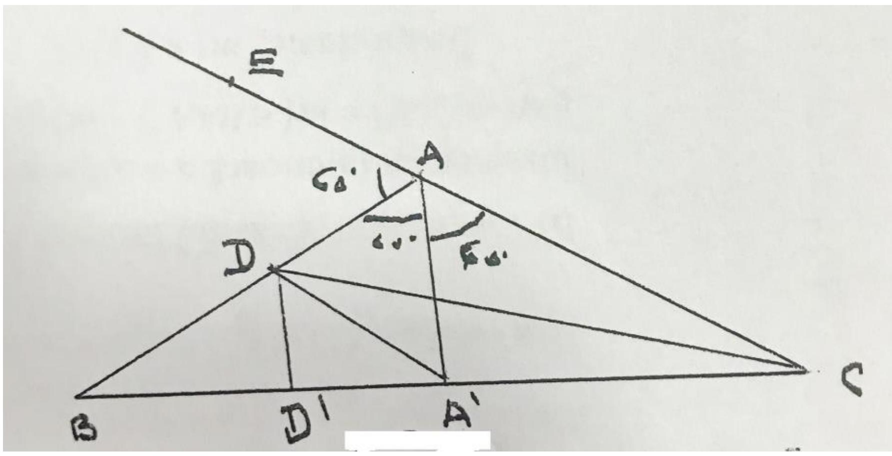
Notăm $DC = a$ și $BC = b$.

Avem $\dfrac{DO}{BO} = \dfrac{AD}{NB} = \dfrac{a}{a+b}$, relație pe care o notăm cu (1).

Dar, $\dfrac{AA'}{CC'} = \dfrac{IA}{IC} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{AA'}{AA'+CC'} = \dfrac{a}{a+b}$, relație pe care o notăm cu (2).

Din relațiile (1) și (2) rezultă relațiile din enunț.

b) Fie punctul E astfel încât $A \in (EC)$. Considerăm triunghiul $\Delta AA'C$ pentru care $[CD$ și $[AB$ sunt bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle C$, respectiv bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle A$ ($m(\sphericalangle EAB) = m(\sphericalangle BAA') = 60^\circ$). Deducem că $[A'D$ este bisectoarea exterioară a triunghiului $AA'C$.



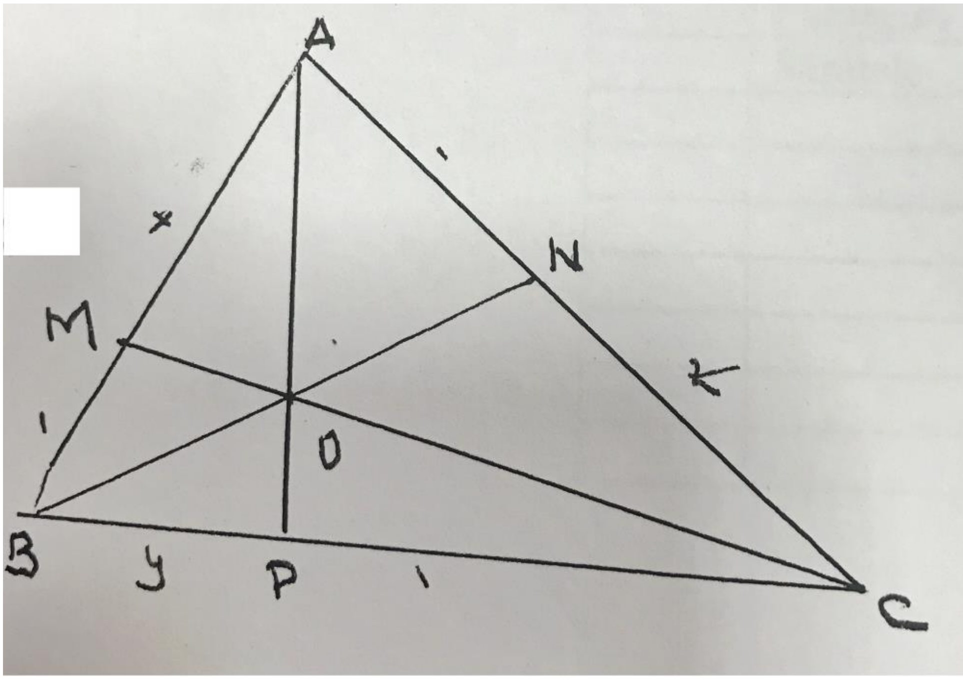
În concluzie, $m(\sphericalangle AA'D) = m(\sphericalangle DA'B) = 45^\circ$, de unde deducem că triunghiul $DD'A'$ este dreptunghic isoscel cu $[DD'] \equiv [A'D']$, ceea ce trebuia demonstrat.

c) Vom folosi teorema Van Aubel:

Dacă ABC este un triunghi și $AP,\ BN, CP$ sunt ceviene concurente în punctul O, atunci are loc relația $\dfrac{AO}{PO} = \dfrac{AN}{CN} + \dfrac{AM}{BM}$.

Demonstrația teoremei Van Aubel.

Notăm $\dfrac{AM}{BM} = x$, $\dfrac{BP}{CP} = y$ și $\dfrac{CN}{AN} = z$ și din teorema lui Ceva obținem $x \cdot y \cdot z = 1$. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ABP cu transversala $M - O - C$ și obținem $\dfrac{AO}{PO} \cdot \dfrac{1}{y+1} \cdot \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AO}{PO} = x \cdot (y+1) = \dfrac{1}{z} + x = \dfrac{AN}{CN} + \dfrac{AM}{BM}$, ceea ce trebuia demonstrat și astfel demonstrația teremei Van Aubel este încheiată.



Mai departe continuăm cu demonstrația problemei. Avem că $\dfrac{A_{[AMN]}}{A_{[ABC]}} = \dfrac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{1}{z+1}$ și $\dfrac{A_{[BOC]}}{A_{[MON]}} = \dfrac{BO \cdot CO}{MO \cdot NO} = \left(y + \dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{y} + z\right)$ (teorema Van Aubel). Prin urmare,

$$\frac{A_{[AMN]} \cdot A_{[BOC]}}{A_{[MON]}} = A_{[ABC]} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{z+1} \cdot \frac{x \cdot y + 1}{x} \cdot \frac{1 + y \cdot z}{y} = A_{[ABC]} \cdot \frac{1}{(x+1)\cdot(z+1)} \cdot \frac{(1+z)\cdot(1+x)}{x \cdot y \cdot z} = A_{[ABC]}.$$

Deci, raportul dat în enunț este egal cu $A_{[ABC]}$, adică este constant.

Problema 3. Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ dacă este adevărată egalitatea:

$$[2 \cdot k \cdot x] = \left[2 \cdot k \cdot x - x + \frac{1}{2}\right], \text{ pentru orice } x \in [0;1).$$

Vasile Popa

Soluție. Dacă $k \geq 2$, atunci considerăm $x = \frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k}$, $\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k} \in (0;1)$.

$\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot k - 1 > k \Leftrightarrow k > 1$, ceea ce este adevărat.

Înlocuind $x = \frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k}$ în relația dată în ipoteză obținem:

$2 \cdot k - 1 = \left[2k - 1 - \frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k} + \frac{1}{2} \right] \Leftrightarrow 0 = \left[\frac{1}{2} - \frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k} \right] \Leftrightarrow 0 = -1$, ceea ce este fals.

Dacă $k \leq -2$, atunci considerăm $x = \frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k}$, $\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k} \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.

$\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot k + 1 < k \Leftrightarrow k < -1$, ceea ce este adevărat.

$\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k} < 1 \Leftrightarrow 2 \cdot k + 1 > k \Leftrightarrow 1 > 0$, , ceea ce este adevărat.

Înlocuind $x = \frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k}$ în relația dată în ipoteză obținem:

$2 \cdot k + 1 = \left[2k + 1 - \frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k} + \frac{1}{2} \right] \Leftrightarrow 0 = \left[\frac{1}{2} - \frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k} \right] \Leftrightarrow 0 = -1$, ceea ce este fals.

Dacă $k = -1$, atunci vom avea $[-2 \cdot x] = \left[-2 \cdot x - x + \frac{1}{2} \right] \Leftrightarrow [-2 \cdot x] = \left[-3 \cdot x + \frac{1}{2} \right]$, pentru orice $x \in [0;1)$. Alegem $x = \frac{1}{6}$ și obținem $\left[-\frac{1}{3} \right] = 0$, ceea ce este fals.

Dacă $k = 0$, atunci vom avea $0 = \left[-x + \frac{1}{2} \right]$, pentru orice $x \in [0;1)$, ceea ce este fals.

Dacă $k = 1$, atunci vom avea $[2 \cdot x] = \left[x + \frac{1}{2} \right]$, ceea este adevărat pentru orice $x \in [0;1)$, deoarece din identitatea lui Hermite avem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $[2 \cdot x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right]$, iar dacă $x \in [0;1)$ avem că $[x] = 0$.

În concluzie, problema admite o singură soluție: $k = 1$.