

Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XVIII-a
Galați, 4 noiembrie 2017

Clasa a XII -a

Problema 1.

a) Se consideră funcțiile $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funcții periodice de perioade T_1 , respectiv T_2 , astfel încât $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{x} = l_1 \in \mathbb{R}$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{x} = l_2 \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{Să se calculeze } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1\left(\left(3 + \sqrt{7}\right)^n \cdot T_1\right)}{f_2\left(\left(2 + \sqrt{2}\right)^n \cdot T_2\right)}.$$

* * *

b) Să se determine numărul real a astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2017^x - 1}{x} \cdot \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}, \text{ admite primitive.}$$

Mihai Totolici, profesor, Galați

Problema 2.

a) Dacă într-un grup (G, \cdot) sunt adevărate pentru un anumit număr natural $n \geq 2$, simultan relațiile $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, $(x \cdot y)^{n+1} = x^{n+1} \cdot y^{n+1}$, $(x \cdot y)^{n+2} = x^{n+2} \cdot y^{n+2}$, $\forall x, y \in G$, atunci grupul este comutativ.

b) Dacă într-un grup (G, \cdot) sunt adevărate pentru un anumit număr natural $n \geq 2$, simultan relațiile $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, $(x \cdot y)^{n+2} = x^{n+2} \cdot y^{n+2}$, $(x \cdot y)^{n+4} = x^{n+4} \cdot y^{n+4}$, $\forall x, y \in G$, atunci grupul este comutativ.

prelucrare Vasile Popa, profesor, Galați

Problema 3.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și G o submulțime cu k elemente a lui $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, care este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor și este grup în raport cu operația indusă. Fie $S = \sum_{A \in G} A$ și t urma matricei S . Știind că $t = n \cdot k$, să se demonstreze că $S = k \cdot I_n$.

* * *