Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național ”Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică ”Cristian S. Calude”

ediția a XIX-a

Galați, 10 noiembrie 2018

Clasa a IX –a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. **a)** Din ipoteza exercițiului putem scrie

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+x\cdot y+y^2\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow(x-y)^2+3\cdot x\cdot y\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\cdot y\in\mathbb{Q}$$

și $(x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\Rightarrow x^2+y^2\in\mathbb{Q}$.

Ridicând ultima egalitate la pătrat obținem $x^4+y^4\in\mathbb{Q}$ și ridicând din nou avem $x^8+y^8\in\mathbb{Q}$.

În plus deoarece $\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^4+y^4\right)=x^6+y^6+x^2\cdot y^2\cdot\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow x^6+y^6\in\mathbb{Q}$ de unde avem

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^8+y^8\right)=x^{10}+y^{10}+x^2\cdot y^2\cdot\left(x^6+y^6\right)\Rightarrow x^{10}+y^{10}\in\mathbb{Q}$$

b) Evident avem $x\in\mathbb{Z}$ și $y\in\mathbb{Z}$. Din a doua ecuație a sistemului obținem

$$\left[\frac{4\cdot x-1}{3}\right]+\left[y-\frac{1}{3}\right]=y+2\Leftrightarrow\left[\frac{4\cdot x-1}{3}\right]+y+\left[-\frac{1}{3}\right]=y+2\Leftrightarrow\left[\frac{4\cdot x-1}{3}\right]=3$$ de unde avem

$3\le\frac{4\cdot x-1}{3}<4\Leftrightarrow 10\le 4\cdot x<13\Rightarrow x=3$. Înlocuind în prima ecuație a sistemului obținem

$\left[\frac{10}{4}\right]+\left[\frac{4\cdot y-1}{3}\right]=3\Leftrightarrow\left[\frac{4\cdot y-1}{3}\right]=1\Leftrightarrow 1\le\frac{4\cdot y-1}{3}<2\Leftrightarrow 4\le 4\cdot y<7$ de unde evident $y=1$.

Problema 2.

Soluție.

a) Aplicând radical relației din enunț obținem:

$|a_1-a_2|=2\cdot|a_2-a_3|=3\cdot|a_3-a_4|=...=2018\cdot|a_{2018}-a_1|=x, x\ge 0$ de unde avem:

$$a_1-a_2=\pm x,\ \ a_2-a_3=\pm\frac{x}{2},\ \ a_3-a_4=\pm\frac{x}{3},....,\ a_{2018}-a_1=\pm\frac{x}{2018}.$$

Adunând toate aceste egalităţi obținem $x\cdot\left(\pm 1\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm...\pm\frac{1}{2018}\right)=0$.

Dacă presupunem prin reducere la absurd că paranteza anterioară ar fi nulă alegem cel mai mare număr prim mai mic decât 2018 , evident acesta este 2017 și avem $\frac{1}{2017}=\pm 1\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm...\pm\frac{1}{2016}\pm\frac{1}{2018}$.

Vom nota cu $M=[1;2;3;...2016;2018]$ și evident M și 2017 sunt prime între ele .

Efectuăm toate operaţiile din membrul drept al ultimei egalităţi și vom avea $\frac{1}{2017}=\frac{k}{M}$ unde evident $k,M\in\mathbb{Z}$ dar din ultima relaţie obţinem $k=\frac{M}{2017}\notin\mathbb{Z}$ deci contradicţie.

Presupunerea iniţială a fost deci falsă adică $x=0$ de unde rezultă cerinţa problemei.

b) Utilizăm C-B-S și obţinem

$$\sum\frac{a}{p+b+c+d}=\sum\frac{a}{3p-a}=\sum\frac{a^2}{a\cdot(3p-a)}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a(3p-a)}.$$

Mai departe ultima fracţie se transformă: $\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\cdot(3p-a)}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{3\cdot p\cdot\sum a-\sum a^2}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{6\cdot p^2-\sum a^2}$

Deci mai rămâne de demonstrat că $\frac{\left(\sum a\right)^2}{6\cdot p^2-\sum a^2}\geq\frac{4}{5}$ (1)

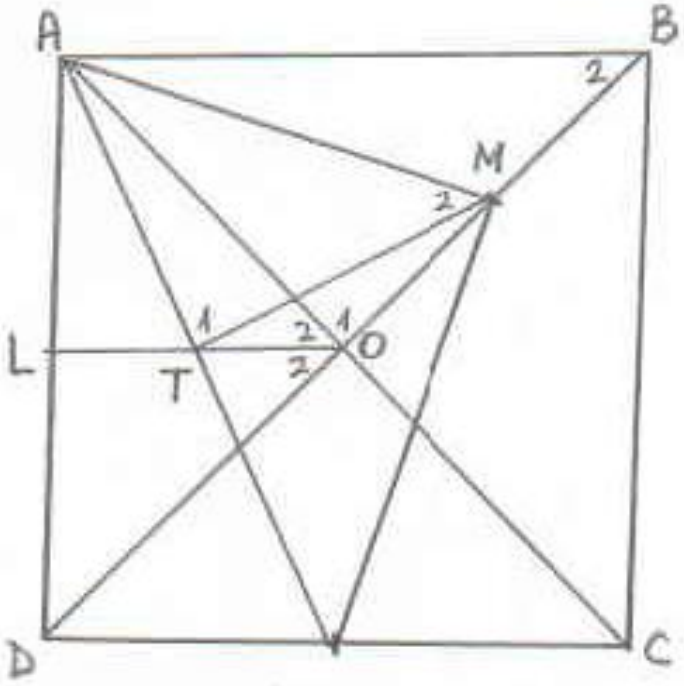
Avem $5\cdot\left(\sum a\right)^2\geq 24\cdot p^2-4\cdot\sum a^2\Leftrightarrow 5\cdot\left(\sum a\right)^2\geq 6\cdot\left(\sum a\right)^2-4\cdot\sum a^2\Leftrightarrow$

$4\cdot\sum a^2\geq\left(\sum a\right)^2\Leftrightarrow 4\cdot\sum a^2\geq\sum a^2+2\cdot\sum a\cdot b\Leftrightarrow 3\cdot\sum a^2\geq 2\cdot\sum a\cdot b$

Din ultima egalitate se obţine ușor $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\geq 0$ relaţie evident adevărată deci am demonstrat (1).

Problema 3.

Soluție. Fie T mijlocul lui $[AN]$. Atunci $[OT]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔCAN și deci avem că $OT\parallel CD\parallel AB$, iar triunghiurile ΔABO și ΔAMT sunt asemenea deoarece $[BO]$și $[MT]$sunt mediane corespunzătoare în ΔABC și respectiv ΔAMN ,triunghiuri asemenea din ipoteza problemei.
Deci $\sphericalangle AOB\equiv\sphericalangle ATM$ adică patrulaterul $AMOT$ este inscriptibil și avem $\sphericalangle AMT\equiv\sphericalangle AOT\equiv\sphericalangle ABO$ din asemănare. Deoarece $AB\parallel OT$ rezultă că $\sphericalangle ABO\equiv\sphericalangle TOD$ ca unghiuri corespondente deci $[OT$ este bisectoarea $\sphericalangle AOD$.
Dacă notăm L punctul de intersecţie dintre OT și AD atunci OL este mediană și bisectoare în triunghiul ΔAOD care devine isoscel.
Rezultă că $AO=OD$ deci $ABCD$ este dreptunghi.
Cu teorema medianei în triunghiul ΔAOB obţinem $16\cdot AM^2=9\cdot AB^2+AD^2$.
Cu aceeași teoremă în triunghiul ΔADC avem $4\cdot AN^2=AB^2+4\cdot AD^2$ iar în triunghiul ΔNOB avem $16\cdot MN^2=AB^2+9\cdot AD^2$.
Deoarece $m(\sphericalangle AMN)=m(\sphericalangle ABC)=90^\circ$ putem scrie relaţia $AM^2+MN^2=AN^2$ și înlocuind cele trei pătrate din formulele precedente obţinem $AB=AD$ adică patrulaterul $ABCD$ este pătrat.


A
B
2
M
2
1
2
1
L
O
T
2
D
C