

Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XIX-a
Galați, 10 noiembrie 2018

Clasa a XII -a

Problema 1.

a) Să se determine funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$, știind că $\frac{1}{f}$ este primitivă a funcției

$$g: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty), g(x) = e^x \cdot f^{2017}(x), \text{ iar } f(0) = \frac{1}{\sqrt[2018]{2018}}.$$

b) Să se determine funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că verifică relația

$$f'(x) - k \cdot f(x) = \frac{e^{2kx}}{e^{2kx} + 3}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } k \text{ este o constantă reală nenulă iar } f(0) = \frac{\pi}{6k\sqrt{3}}.$$

Mihai Totolici, profesor, Galați

Problema 2.

Fie (G, \cdot) un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente, unde n este un număr natural fixat, $n \geq 2$.

Dacă $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n, \forall x, y \in G$, să se demonstreze că grupul (G, \cdot) este comutativ.

* * *

Problema 3.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă cu derivata continuă, cu proprietatea că

$$f(x + f'(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Să se demonstreze că:}$$

a) Ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin o soluție reală;

b) Există funcții neconstante cu proprietatea din enunț;

c) Dacă ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin două soluții reale distincte, atunci f este funcție constantă.

* * *