Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național ”Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică ”Cristian S. Calude”
ediția a XIX-a
Galați, 10 noiembrie 2018

Clasa a XI –a
Barem

Problema 1.

a) Observăm că $A^2=\begin{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{2}\right) & \left(2+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) \\ \sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right) & \left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$. ……………………….……………………..1 punct

$A^{2018}=\begin{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} & \left(2+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} \\ \sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} & \left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} \end{pmatrix}$……………….…………………………..1 punct

b)Fie $A=B+C$, unde $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Arătăm că există $X,Y\in M_3\left(\mathbb{R}\right)$ astfel încât $X^{2017}=B$ şi $Y^{2019}=C$……………….…………………………………………………..1 punct

Caut $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ cu $X^{2017}=B\Rightarrow XB=BX\Rightarrow X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}\Rightarrow X=x_1I_3+D,\ D=\begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cum $D^3=O_3\Rightarrow X^n=\left(x_1I_3+D\right)^n\Rightarrow X^n=C_n^0x_1^nI_3+C_n^1x_1^{n-1}D+C_n^2x_1^{n-2}D^2$ ……………………..1 punct

$\Rightarrow X^n=\begin{pmatrix} x_1^n & nx_1^{n-1}x_2 & nx_1^{n-1}x_3+\dfrac{n(n-1)}{2}x_1^{n-2}x_2^2 \\ 0 & x_1^n & nx_1^{n-1}x_2 \\ 0 & 0 & x_1^n \end{pmatrix}$. …………………...….……………………..1 punct

Astfel, $X=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2017} & -\dfrac{1008}{2017^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2017} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ……………….…………………………………….………..1 punct

$Y^{2019}=C\Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2019} & 1 & 0 \\ -\dfrac{1009}{2019^2} & \dfrac{1}{2019} & 1 \end{pmatrix}$……………….…………………………..………..1 punct

Problema 2.

a) $\left(a_{n+1}-2a_n\right)^2=3a_n^2-2$ …………………………………………………………..…………..1 punct

$a_{n+1}^2+a_n^2-4a_na_{n+1}+2=0$,

$a_{n+2}^2+a_{n+1}^2-4a_{n+1}a_{n+2}+2=0$. ………………………………………………………………..1 punct

$a_{n+2}^2-a_n^2-4a_{n+1}\left(a_{n+2}-a_n\right)=0$. $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$…………..……….…………………..1 punct

b)Sirul este crescător. ………………………………………..….…………………..2 punct

Cum $\sqrt[k]{k+1}>1$rezultă că

$a_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n]{n}}}}>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n-1]{n}}}}>...>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{5}}}>1{,}9$…………..1 punct

Pe de altă parte, folosind $\sqrt[k]{k}<\sqrt[k]{k+2}<2$

$a_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n]{n}}}}<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n-1]{n-1+2}}}}<...<\sqrt{2+\sqrt[3]{5}}<2$…………..1 punct

Problema 3.

a)Fie $a=\sqrt{2}-1$, atunci $a^2+2a-1=0$ …………………………………….……….……..1 punct

$$x_{n+1}=\frac{x_n+a}{1-ax_n}=\frac{\frac{x_{n-1}+a}{1-ax_{n-1}}+a}{1-a\frac{x_{n-1}+a}{1-ax_{n-1}}}=\frac{\left(1-a^2\right)x_{n-1}+2}{1-a^2-2ax_{n-1}}=\frac{2ax_{n-1}+2}{2a-2ax_{n-1}}=\frac{x_{n-1}+1}{1-x_{n-1}}$$ ……………………....1 punct

$$x_{n+1}=\frac{\frac{x_{n-3}+1}{1-x_{n-3}}+1}{1-\frac{x_{n-3}+1}{1-x_{n-3}}}=-\frac{1}{x_{n-3}}=-\frac{1}{-\frac{1}{x_{n-7}}}=x_{n-7}$$. perioada şirului este egală cu 8. ……….………..1 punct

Metoda 2

Fie $x_1=tg\varphi,\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ ……………………………….…………….…..1 punct

avem: $x_2=\frac{x_1+\sqrt{2}-1}{1-x_1\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{tg\varphi+tg\frac{\pi}{8}}{1-tg\varphi tg\frac{\pi}{8}}=tg\left(\varphi+\frac{\pi}{8}\right)$……………….……..………………..1 punct

Se arată prin inducţie că în general $x_n=tg\left(\varphi+\left(n-1\right)\frac{\pi}{8}\right)$, deci $x_n=x_{n+8}$… ……………..1 punct

b)Distingem mai multe cazuri.

Dacă $a=0$ sau $a=1$ şirul este divergent. ……………….……………………….……..1 punct

Cazul 1: $0<x_1<l$. În acest caz, $x_2-x_1>0$. In plus:

$$l-x_2=\sqrt{1-l}-\sqrt{1-x_1}=\frac{x_1-l}{\sqrt{1-l}+\sqrt{1-x_1}}<0$$

$x_2-1=\sqrt{1-x_1}-1=\frac{-x_1}{1+\sqrt{1-x_1}}<0$, astfel că $l<x_2<1$. Se arată asemănător că

$x_3>0,x_3<l,x_2>x_3,x_4>x_3,x_4>l,x_4<x_2,...$…………….…………………………..1 punct

Astfel, şirul dat verifică inegalităţile:

$0<x_1<x_3<x_5<...x_{2n+1}<...<l<...<x_{2n}<...<x_4<x_2<1$.

Fie $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1},B=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$, cum $x_{2n+1}=\sqrt{1-x_{2n}},x_{2n}=\sqrt{1-x_{2n-1}}$, rezultă că $A=\sqrt{1-B},B=\sqrt{1-A}$,

de unde deducem că $A=B=l=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ……………………………………………..1 punct

Cazul 2: $l<x_1<1$ aceeaşi limită pentru şirul dat. ……………………………..………..1 punct