Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XIX-a
Galați, 10 noiembrie 2018

Clasa a XI –a
Soluţii

Problema 1.

a) Fie maticea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^{2018}.

b)Fie maticea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Arătaţi că există $X,Y\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A=X^{2017}+Y^{2019}$.

Soluţie:

a) Observăm că $A^2=\begin{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{2}\right) & \left(2+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) \\ \sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right) & \left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$. Putem demonstra prin inducţie

$A^n=\begin{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{2}\right)^{n-1} & \left(2+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)^{n-1} \\ \sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)^{n-1} & \left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$, atunci $A^{2018}=\begin{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} & \left(2+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} \\ \sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} & \left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)^{2017} \end{pmatrix}$.

b)Fie $A=B+C$, unde $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Arătăm că există $X,Y\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2017}=B$ şi $Y^{2019}=C$.

Caut $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ cu $X^{2017}=B\Rightarrow XB=BX\Rightarrow X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}\Rightarrow X=x_1+D, D=\begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cum

$D^3=O_3\Rightarrow X^n=\left(x_1I_3+D\right)^n\Rightarrow X^n=C_n^0x_1^nI_3+C_n^1x_1^{n-1}D+C_n^2x_1^{n-2}D^2$

$\Rightarrow X^n=\begin{pmatrix} x_1^n & nx_1^{n-1}x_2 & nx_1^{n-1}x_3+\dfrac{n(n-1)}{2}x_1^{n-2}x_2^2 \\ 0 & x_1^n & nx_1^{n-1}x_2 \\ 0 & 0 & x_1^n \end{pmatrix}$. Cum $X^{2017}=B\Rightarrow x_1=1, x_2=\dfrac{1}{2017}, x_3=-\dfrac{1008}{2017^2}$,

Astfel, $X=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2017} & -\dfrac{1008}{2017^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2017} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La fel obţinem pentru $Y^n=\begin{pmatrix} x_1^n & 0 & 0 \\ nx_1^{n-1}x_2 & x_1^n & 0 \\ nx_1^{n-1}x_3+\dfrac{n(n-1)}{2}x_1^{n-2}x_2^2 & nx_1^{n-1}x_2 & x_1^n \end{pmatrix}$

$$Y^{2019}=C\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2019} & 1 & 0\\ -\frac{1009}{2019^2} & \frac{1}{2019} & 1\end{pmatrix}.$$

Problema 2.

a)Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir definit astfel: $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2-2},\ n\geq 1$. Să se demonstreze că $a_n\in\mathbb{N},\ \forall n\geq 1$.

b)Să se arate că şirul de termen general $a_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n]{n}}}}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ este convergent şi limita sa este cuprinsă între $1,9$ şi 2.

Soluţie:

a)Relaţia de recurenţă se mai scrie

$(a_{n+1}-2a_n)^2=3a_n^2-2$ sau

$a_{n+1}^2+a_n^2-4a_na_{n+1}+2=0$, deci

$a_{n+2}^2+a_{n+1}^2-4a_{n+1}a_{n+2}+2=0$. Prin scădere obţinem:

$a_{n+2}^2-a_n^2-4a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=0$. Cum şirul este strict crescător, găsim că $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$.Ceea ce înseamnă că toţi termenii şirului sunt numere naturale.

b)Sirul este evident crescător. Pornind de la inegalitatea $n+\sqrt[n+1]{n+1}>n$ formată din termeni pozitivi, dacă aplicăm radicalul de ordin n obţinem: $\sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+1}}>\sqrt[n]{n}$; adunând apoi $n-1$ şi aplicând iarăşi radicalul de ordin $n-1$, după n paşi obţinem că $a_{n+1}>a_n$.

Cum $\sqrt[k]{k+1}>1$rezultă că

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n]{n}}}}>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n-1]{n}}}}>...>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{5}}}>1,9$$

Pe de altă parte, folosind $\sqrt[k]{k}<\sqrt[k]{k+2}<2$

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n]{n}}}}<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+...+\sqrt[n-1]{n-1+2}}}}<...<\sqrt{2+\sqrt[3]{5}}<2.$$

În concluzie, limita şirul este între 1,9 şi 2.

Problema 3.

a) $x_1=b,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+\sqrt{2}-1}{1-x_n\left(\sqrt{2}-1\right)}, n\geq 1, b\in\mathbb{R}$ este o constantă. Să se arate că şirul este periodic şi să i se calculeze perioada.

b)Să se studieze convergenţa şirului $x_1=\sqrt{1-a},\ x_{n+1}=\sqrt{1-x_n}, n\geq 2$, unde $0\leq a\leq 1$ este fixat.

Soluţie:

a)Metoda 1

Fie $a=\sqrt{2}-1$, atunci $a^2+2a-1=0$ şi avem:

$$x_{n+1}=\frac{x_n+a}{1-ax_n}=\frac{\frac{x_{n-1}+a}{1-ax_{n-1}}+a}{1-a\frac{x_{n-1}+a}{1-ax_{n-1}}}=\frac{(1-a^2)x_{n-1}+2}{1-a^2-2ax_{n-1}}=\frac{2ax_{n-1}+2}{2a-2ax_{n-1}}=\frac{x_{n-1}+1}{1-x_{n-1}}$$

$$x_{n+1}=\frac{\frac{x_{n-3}+1}{1-x_{n-3}}+1}{1-\frac{x_{n-3}+1}{1-x_{n-3}}}=-\frac{1}{x_{n-3}}=-\frac{1}{-\frac{1}{x_{n-7}}}=x_{n-7}$$. Am găsit că $x_{n+1}=x_{n-7}$, înseamnă că perioada şirului este egală cu 8.

Metoda 2

Fie $x_1=tg\varphi,\ \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Deoarece $tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$, avem: $x_2=\frac{x_1+\sqrt{2}-1}{1-x_1\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{tg\varphi+tg\frac{\pi}{8}}{1-tg\varphi tg\frac{\pi}{8}}=tg\left(\varphi+\frac{\pi}{8}\right)$

Se arată prin inducţie că în general $x_n=tg\left(\varphi+\left(n-1\right)\frac{\pi}{8}\right)$, de unde rezultă că $x_n=x_{n+8}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

b)Distingem mai multe cazuri.

Dacă $a=0$ sau $a=1$ şirul este divergent.

Vom studia în continuare cazul $0<a<1$. Este evident că $0<x_1<1$. Avem:

$x_2-x_1=\sqrt{1-x_1}-x_1=\frac{1-x_1-x_1^2}{\sqrt{1-x_1}+x_1}$ şi semnul lui x_2-x_1 este dat de trinomul $1-x_1-x_1^2$ cu rădăcinile $l=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ l'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Suntem conduşi la considerarea următoarelor două situaţii:

Cazul 1: $0<x_1<l$. În acest caz, $x_2-x_1>0$. In plus:

$$l-x_2=\sqrt{1-l}-\sqrt{1-x_1}=\frac{x_1-l}{\sqrt{1-l}+\sqrt{1-x_1}}<0$$

$x_2-1=\sqrt{1-x_1}-1=\frac{-x_1}{1+\sqrt{1-x_1}}<0$, astfel că $l<x_2<1$. Se arată asemănător că

$x_3>0,\ x_3<l,\ x_2>x_3,\ x_4>x_3,\ x_4>l,\ x_4<x_2,...$

Astfel, şirul dat verifică inegalităţile:

$0<x_1<x_3<x_5<...x_{2n+1}<...<l<...<x_{2n}<...<x_4<x_2<1$.

Fie $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1},\ B=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$, cum $x_{2n+1}=\sqrt{1-x_{2n}},\ x_{2n}=\sqrt{1-x_{2n-1}}$, rezultă că $A=\sqrt{1-B},\ B=\sqrt{1-A}$, de unde deducem că $A=B=l=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Cazul 2: $l<x_1<1$ se studiază la fel şi se găseşte aceeaşi limită pentru şirul dat.