Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România **Filiala Galați**

Colegiul Național ”Vasile Alecsandri” **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

Concursul Interjudețean de Matematică ”Cristian S. Calude”
ediția a XIXa
Galați, 10 noiembrie 2018

Clasa a 7–a

SOLUȚII

Problema 1.

a) Demonstrați că numărul $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2018}$ nu este număr natural.

b) Demonstrați că $\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+...+\frac{2017}{2018^2}<10$.

c) Demonstrați că $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2019^2}<\frac{3}{2}$.

Soluție.
a)
Fie **b=2017** cel mai mare număr prim mai mic decât 2018.

$$a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}=\frac{2018!+\frac{2018!}{2}+\frac{2018!}{3}+...+\frac{2018!}{2016}+\frac{2018!}{2017}+\frac{2018!}{2018}}{2018!}$$

$$a=\frac{2016!\cdot 2017\cdot 2018+\frac{2016!\cdot 2017\cdot 2018}{2}+...+\frac{2016!\cdot 2017\cdot 2018}{2017}+\frac{2016!\cdot 2017\cdot 2018}{2018}}{2018!}$$

$$a=\frac{M_{2017}+2016!\cdot 2018}{2016!\cdot 2017\cdot 2018}$$

$(M_{2017}+2016!\cdot 2018)$ nu este multiplu de 2017 ; numitorul fracției a este multiplu de $17\rightarrow$ a este fracție periodică $\rightarrow a\notin\mathbb{N}$

b)

$$\frac{n}{(n+1)^2}<\frac{n+1}{(n+1)^2}\rightarrow\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2017}{2018^2}<\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}+...+\frac{2018}{2018^2}=$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{15})+...+(\frac{1}{512}+\frac{1}{513}+...+\frac{1}{1023})+(\frac{1}{2014}+...+\frac{1}{2018})=$$

$$=(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2-1})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{2^3-1})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3+1}+...+\frac{1}{2^4-1})+...+(\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^9+1}+...+\frac{1}{2^{10}-1})+$$

$$+(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}+1}...+\frac{1}{2^{10}+994})<\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+...+\frac{1}{512}\cdot 512+(\frac{1}{1024}+...+\frac{1}{2018})<9+\frac{1}{1024}\cdot 995<10$$

c)

$$\begin{cases}\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)(n+1)}\\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})\end{cases}\rightarrow$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2019^2}<\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{2017\cdot 2019}<$$

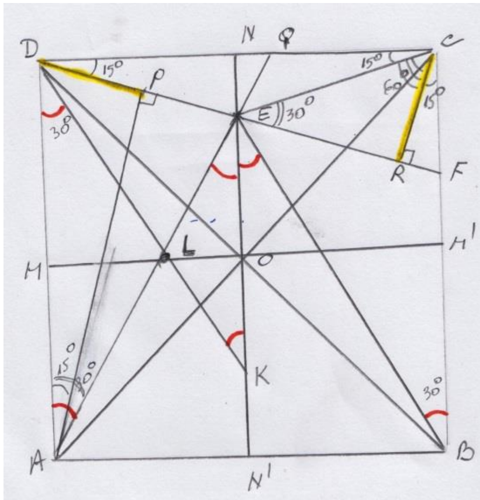
$$<1+\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2019})=1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2019})=1+\frac{1009}{2019}<1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Problema 2.

Se consideră pătratul *ABCD* cu *O*, intersecția diagonalelor [*AC*] și [*BD*]. Perpendiculara din *O* pe *AB* intersectează latura [*DC*] în *N* și latura [*AB*] în *N'*. Perpendiculara din *O* pe *AD* intersectează latura [*AD*] în *M* și latura [*BC*] în *M'*. Construim *DF*, $F\in[BC]$ astfel încât $m(\sphericalangle FDC)=15^\circ$. Fie $\{E\}=DF\cap NN'$, $\{L\}=AE\cap MM'$ și $\{Q\}=AE\cap DC$. Să se demonstreze că :

a) $DL \parallel BE$

b) $\triangle DLQ$ este echilateral.



Soluție.

a)

ABCD pătrat $\rightarrow[ON]\parallel[BC]$; *O*- mijlocul [*BD*] $\rightarrow[ON]$ este linie mijlocie în $\triangle CDB \rightarrow N$ este mijlocul [*DC*] .

În $\triangle DEC \rightarrow [EN]$ este înălțime și mediană $\rightarrow \triangle DEC$ este isoscel $\rightarrow [DE]\equiv[CE], \sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle DCE \rightarrow \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BCE$.

$$\triangle ADE, \triangle BCE \begin{cases}[DE]\equiv[CE]\\ [AD]\equiv[BC]\\ \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BCE\end{cases} \xrightarrow{L.U.L} \triangle ADE \equiv \triangle BCE \rightarrow [AE]\equiv[BE], \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CBE \rightarrow \triangle AEB$$

isoscel ; [EN'] – înălțime $\rightarrow$ [EN'] bisectoare $\rightarrow \sphericalangle BEO \equiv \sphericalangle AEO$

CB||NN',BE secantă $\rightarrow \sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle N'EB$ (alterne interne)

$\triangle ADL$ isoscel([LM] este înălțime și mediană) $\rightarrow \sphericalangle DAL \equiv \sphericalangle ADL$

NN'||AD, DK secantă $\rightarrow \sphericalangle DKE \equiv \sphericalangle KDA$

$$\begin{cases}\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle DAE\\ \sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle BEN'\\ \sphericalangle BEN' \equiv \sphericalangle AEN' \rightarrow \sphericalangle DKE \equiv \sphericalangle BEN' \rightarrow DL \parallel BE \text{ (unghiuri alterne interne congruente)}\\ \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle ADK\\ \sphericalangle ADK \equiv \sphericalangle DKE\end{cases}$$

b)

Construim $CR \perp DF, R\in DF$.

Construim $AP \perp DF, P\in DF$.

$\triangle DEC$ isoscel ([EN] mediană și înălțime)

$\rightarrow m(\sphericalangle CDE)=m(\sphericalangle DCE)=15^\circ \rightarrow m(\sphericalangle DEC)=150^\circ \rightarrow m(\sphericalangle CER)=30^\circ$.

$\triangle CRE$ dreptunghic, $m(\sphericalangle CER)=30^\circ \rightarrow CR=\frac{EC}{2}=\frac{DE}{2}=\frac{DF}{4}$

$$\begin{cases}[AD]\equiv[DC]\\ \sphericalangle CDF \equiv \sphericalangle ADP\end{cases} \rightarrow (IU) \rightarrow \triangle CRD \equiv \triangle DPA \rightarrow CR=DP \rightarrow DP=\frac{DE}{2} \rightarrow \triangle ADE \text{ isoscel} \rightarrow$$

$m(\sphericalangle DAE)=180^\circ-150^0=30^0 \rightarrow m(\sphericalangle AQD)=60^0$

$\triangle DQA$ dreptunghic, $[DL]$ mediană $\rightarrow DL = \dfrac{AQ}{2} = QL \rightarrow \triangle DQL$ isoscel $\rightarrow \triangle DQL$ echilateral

Problema 3.

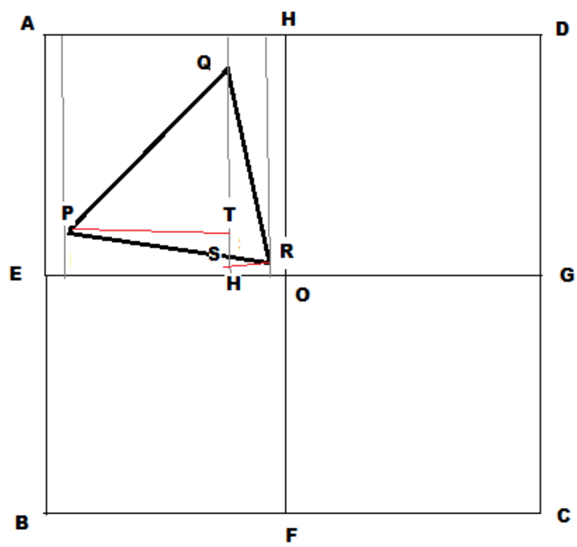
Într-un pătrat de latură **1** se consideră nouă puncte arbitrare, oricare trei necoliniare.

a) Demonstrați că printre cele nouă puncte există cel puțin trei puncte astfel încât aria triunghiului determinat de aceste trei puncte să fie mai mică sau egală cu $\dfrac{1}{8}$.

b) Stabiliți poziția celor trei puncte astfel încât aria triunghiului determinat de acestea să fie egală cu $\dfrac{1}{8}$. Justificați.

Soluție.

a)



Fie pătratul **ABCD** de latură **1**.
Considerăm punctele : E mijlocul[AB], F mijlocul [BC], G mijlocul [CD] și H mijlocul [AD].
Prin urmare AE=EB=BF=FC=CG=GD=HD=AH=$\dfrac{1}{4}$.
Segmentele [EG] și [HF] determină o partiționare a pătratului în 4 pătrate de latură $\dfrac{1}{2}$ și arie $\dfrac{1}{4}$.
Conform principiului lui Dirichlet, oricum am amplasa cele 9 puncte cel puțin trei dintre ele se vor afla în interiorul unui pătrat de latură $\dfrac{1}{2}$ sau pe laturile acelui pătrat.
Fie cele trei puncte P,Q și R în interiorul pătratului AEOH. Construim paralelele prin R, P și Q la AE. Una dintre aceste paralele se va afla între celelalte două deci va intersecta latura opusă punctului prin care trece.
Fie QS||AE, $S \in [RP]$. Construim $PT \perp QS$ și $RH \perp QS$. Atunci avem :

$$A_{\triangle RQP} = A_{\triangle AQS} + A_{\triangle QPS} = \frac{QS \cdot AH + QS \cdot PS}{2} \le \frac{AE \cdot OE}{2} = \frac{A_{AEOH}}{2} = \frac{1}{8}$$

b)

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $QS \cdot (PT + AH) = EO \cdot AE$, adică dacă QS=AE și QT+TH=AE.
Prin urmare obținem egalitate numai dacă o latură a triunghiului coincide cu o latură a pătratului și celălalt vârf al triunghiului se află pe latura opusă.