Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XX-a
Galaţi, 02 noiembrie 2019

Clasa a X-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Din motive de simetrie putem presupune $a \le b \le c \le d \Rightarrow a^4 \le b^4 \le c^4 \le d^4$ (folosim inegalitatea lui Cebâşev)

$$a^5+b^5+c^5+d^5=a\cdot a^4+b\cdot b^4+c\cdot c^4+d\cdot d^4 \ge \frac{1}{4}(a+b+c+d)\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right) \quad (1)$$

Conform inegalităţii mediilor: $\dfrac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4} \ge \sqrt[4]{a^4\cdot b^4\cdot c^4\cdot d^4}=abcd$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă relaţia din enunţ.

SAU Folosim inegalitatea mediilor $\dfrac{a^5+a^5+b^5+c^5+d^5}{5} \ge \sqrt[5]{a^5\cdot a^5\cdot b^5\cdot c^5\cdot d^5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^5+a^5+b^5+c^5+d^5 \ge 5\sqrt[5]{a^{10}\cdot b^5\cdot c^5\cdot d^5}=5a^2bcd \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2a^5+b^5+c^5+d^5 \ge 5a^2bcd$ şi analoagele

$$a^5+2b^5+c^5+d^5 \ge 5ab^2cd$$

$$a^5+b^5+2c^5+d^5 \ge 5abc^2d$$

$$a^5+b^5+c^5+2d^5 \ge 5abcd^2.$$

Adunând membru cu membru aceste relaţii şi simplificând cu 5, obţinem relaţia din enunţ.

b) Vom căuta să ordonăm numerele $a_1, a_2, ...a_n$.

Fie $x\in\mathbb{R}, x=m+\alpha,\ m\in\mathbb{Z}$ şi $\alpha\in[0,1)$.

Avem $a_k=(n-k)\cdot m+[k(m+\alpha)]=mn+[k\alpha]$ (am folosit $[k+\alpha]=k+[x],\ \forall k\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R}$).

Numerele sunt: $a_1=mn,\ a_2=mn+[2\alpha],\ \dots,\ a_n=mn+[n\alpha]$.

Rezultă că $a_1\le a_2\le\dots\le a_n$.

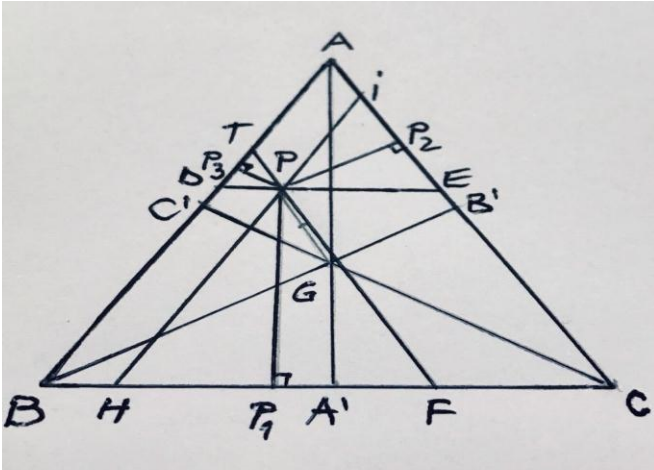
Pentru a fi consecutive, trebuie ca $[2\alpha]=1,\ [3\alpha]=2,\ \dots,\ [n\alpha]=n-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\le 2\alpha<2,\ 2\le 3\alpha<3,\ \dots,\ n-1\le n\alpha<n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le\alpha<1,\ \dfrac{2}{3}\le\alpha<1,\ \dots,\ \dfrac{n-1}{n}\le\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha\in\left[\dfrac{n-1}{n},1\right).$

Obţinem rezultatul $x\in\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\left[m+\dfrac{n-1}{n},m+1\right).$

Problema 2.



Soluţie. a) Triunghiurile ΔPHF, ΔPEI, ΔPDT sunt echilaterale, iar P_1, P_2, P_3 sunt mijloacele segmentelor $[HF]$, $[IE]$, respectiv $[DT]$. Obţinem $\overrightarrow{PP_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{PF}\right)$ şi analoagele; adunându-le obţinem relaţia de la punctul a).

b) Folosim paralelogramele $ATPI$, $BHPD$ şi $CFPE$ deducem $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PI}$ şi analoagele.

Relaţia de la punctul a) devine $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot \overrightarrow{PG_1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{PG_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PG} \\ G_1 \text{ centrul de greutate al triunghiului } \Delta P_1 P_1 P_3 \end{array}\right\} \Rightarrow G_1 \text{ este mijlocul segmentului } [PG].$$

c) Folosim Teorema lui Pitagora şi obţinem $P_1B^2 - P_1C^2 = PB^2 - PC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(P_1B - P_1C) = PB^2 - PC^2$ şi analoagele ($a = BC$).

Adunându-le membru cu membru, obţinem: $BP_1 + CP_2 + AP_3 = P_1C + P_2A + P_3B$ (1).

Considerăm situaţia $P \in [GAC'] - [AC']$ (celelalte se rezolvă analog).

Relaţia (1) devine

$\frac{a}{2} - P_1A' + \frac{a}{2} + P_2B' + \frac{a}{2} - P_3C' = \frac{a}{2} + P_1A' + \frac{a}{2} - P_2B' + \frac{a}{2} + P_3C' \Rightarrow P_2B' = P_1A' + P_3C'$.

Observaţie. Dacă PG $(P \neq G)$ nu trece printr-un vârf al triunghiului ΔABC şi nu este paralelă cu una din laturile triunghiului, se intersectează cu una din prelungirile laturilor triunghiului. De exemplu, dacă $PG \cap AC = \{L\}$, $A \in (LC)$, se poate construi triunghiul echilateral ΔPMN, $G \in (MN)$ cu laturile paralele cu ale triunghiului ΔABC. Afirmaţia de la punctul c) se justifică considerând proiecţiile lui (PG) pe laturile triunghiului ΔPMN, notând $\alpha = m(\sphericalangle GPM)$.

Problema 3

Soluţie. a) Pentru $x = y = 1 \Rightarrow f(1) = \left(f(1)\right)^2 \Rightarrow f(1) \in \{0,1\}$.

Dacă $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{x}{1}\right) = f(x) \cdot f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, verifică .

Pentru $f(1) = 1$, luăm $x = y \Rightarrow \left(f(x)\right)^2 = 1 \Rightarrow f(x) \in \{1, -1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Luăm $x = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Pentru $y = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x^2) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(f(x)\right)^2 = 1$. Deci $f(x) = 1,\ \forall x > 0$.

Pentru $x < 0$, $f(x) \in \{-1, 1\}$.

Presupunem că $\exists x_0 < 0$ cu $f(x_0) = -1$.

Fie $x < 0$, $1 = f\left(\frac{x}{x_0}\right) = f(x) \cdot f(x_0) \Rightarrow f(x) = -1$.

Deci $f(x) = -1,\ \forall x < 0$.

Am obţinut trei soluţii: $f = 0$, $f = 1$ şi $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

b) Datorită simetriei, putem considera $x \le y \le z$.

Avem $x^2 + xyz \le y^2 + xyz \le z^2 + xyz$ şi $\frac{1}{y+z} \le \frac{1}{z+x} \le \frac{1}{x+y}$.

Aplicând inegalitatea lui Cebâşev obţinem:

$$\frac{x^2+xyz}{y+z} + \frac{y^2+xyz}{z+x} + \frac{z^2+xyz}{x+y} \ge \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2+3xyz\right) \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right), (1)$$

Dar $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \ge \frac{9}{2(x+y+z)} = \frac{9}{2}$, (2)

Din relaţiile (1) şi (2) deducem: $\frac{x^2+xyz}{y+z} + \frac{y^2+xyz}{z+x} + \frac{z^2+xyz}{x+y} \ge \frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2+3xyz\right)$.

Pentru a încheia, vom demonstra: $\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2+3xyz\right) \ge \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3xyz \ge \frac{4}{9}$, (3)

Notăm $P = xy$, $S = x + y$ iar relaţia (3) se scrie sub forma:

$$S^2 - P + (1-S)^2 + 3P(1-S) \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow 2S^2 - 2S + P - 3PS + \frac{5}{9} \geq 0$$

Avem $P \leq \frac{S^2}{4}$, deci $P \in \left(0, \frac{S^2}{4}\right]$. Considerăm restricţia funcţiei liniare (în P):

$f(P) = (1-3S)P + 2S^2 - 2S + \frac{5}{9}$, $f : \left[0, \frac{S^2}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 2S^2 - 2S + \frac{5}{9} > 0$,

$f\left(\frac{S^2}{4}\right) = -\frac{1}{36}(3S-2)^2 \cdot (3S-5) \geq 0$, prin urmare relaţia (3) este adevărată.

Egalitatea are loc când $S = \frac{2}{3}$, deci pentru $x = y = z = \frac{1}{3}$.