Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XX-a
Galați, 2 noiembrie 2019

Clasa a XII –a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. a) Notăm $u(x)=e^{nx}+\cos x$, $u(x)>1+\cos x\geq 0, \forall x\in(0,+\infty)$. Atunci $u'(x)=ne^{nx}-\sin x$, iar $f(x)=\dfrac{3u'(x)-2u(x)}{u(x)}$, de unde, prin integrare pe $(0,+\infty)$ rezultă că primitivele funcției f sunt de forma $F(x)=3\ln(e^{nx}+\cos x)-2x+c,\ F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

b) Prin înmulțire cu e^x relația din ipoteză devine

$e^x f(x)\operatorname{arctg}x+f(x)+e^x F(x)\left(\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)=0$, $\forall x\in[0;+\infty)$, de unde, ținând cont că $F'=f$, avem $e^x F'(x)\operatorname{arctg}x+e^x F(x)\left(\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)=-f(x)$, $\forall x\in[0;+\infty)$, adică

$\left(e^x F(x)\operatorname{arctg}x\right)'=-f(x), \forall x\in[0;+\infty)$, iar prin integrare va rezulta

$e^x F(x)\operatorname{arctg}x=-F(x)+c, \forall x\in[0;+\infty)$, iar din condiția $F(0)=1$ rezultă $c=1$, deci

$F(x)=\dfrac{1}{e^x\operatorname{arctg}x+1}$, iar de aici rezultă că

$$f(x)=-\frac{\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{1+x^2}}{\left(e^x\operatorname{arctg}x+1\right)^2}e^x=-\frac{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x+1}{\left(1+x^2\right)\left(e^x\operatorname{arctg}x+1\right)^2}e^x\ ,\ \forall x\in[0;+\infty)$$

Problema 2.

Soluție.

Fie $x,y\in G$ și $z=(xy)(yx)^{-1}$. Este suficient să demonstrăm că $z^2=e$ și apoi din **a)** va rezulta că $z=e$, iar de aici, concluzia problemei.

Avem succesiv $x^2y^{-1}=\left((xy)y^{-1}\right)^2y^{-1}=\left(y^{-1}(xy)\right)^2y^{-1}=y^{-1}xyy^{-1}xyy^{-1}=y^{-1}x^2$, de unde prin înmulțire la stânga cu x^{-1} avem $xy^{-1}=x^{-1}y^{-1}x^2$, iar apoi prin înmulțire la dreapta cu x^{-1} rezultă $xy^{-1}x^{-1}=x^{-1}y^{-1}x$, sau , echivalent, $x(xy)^{-1}=(yx)^{-1}x$.

Analog, schimbând y cu x , avem $y(yx)^{-1}=(xy)^{-1}y$.

Atunci $z^2=xy(yx)^{-1}xy(yx)^{-1}=xy\left((yx)^{-1}x\right)y(yx)^{-1}=xyx(xy)^{-1}y(yx)^{-1}=xyx\left((xy)^{-1}y\right)(yx)^{-1}=$

$=xyxy(yx)^{-1}(yx)^{-1}=(xy)^2(yx)^{-2}=(yx)^2(yx)^{-2}=e$, de unde rezultă că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Problema 3.

Soluție. a) Din $f(x)=x\cdot g(x),\forall x\in(0,1]$, prin derivare rezultă că $f'(x)=g(x)+xg'(x)$ și înlocuind în relația din ipoteză va rezulta că $\left(g(x)+xg'(x)\right)\left(x+xg(x)\right)=xg(x)-x$, sau echivalent, $xg'(x)\left(1+g(x)\right)=-1-g^2(x)$, adică $\frac{g'(x)\left(1+g(x)\right)}{1+g^2(x)}=-\frac{1}{x}$, $\forall x\in(0,1]$, de unde prin integrare vom obține $\operatorname{arctg} g(x)+\frac{1}{2}\ln\left(1+g^2(x)\right)=-\ln x+c,\forall x\in(0,1]$. Ținând cont de faptul că $f(1)=g(1)=0$, va rezulta că $c=0$ și relația de mai sus se scrie echivalent $\ln\left(e^{\operatorname{arctg} g(x)}\right)+\ln\sqrt{1+g(x)^2}=\ln\frac{1}{x},\forall x\in(0,1]$, deci $e^{\operatorname{arctg} g(x)}\cdot\sqrt{1+g(x)^2}=\frac{1}{x},\forall x\in(0,1]$, așadar, $\frac{e^{-\operatorname{arctg} g(x)}}{\sqrt{1+g(x)^2}}=x,\forall x\in(0,1]$. Putem alege acum funcția $F:[0,\infty)\to D$, $F(t)=\frac{e^{-\operatorname{arctg} t}}{\sqrt{1+t^2}}$, unde $D=\operatorname{Im}F$. Din calcul rezultă că $F'(t)=-\frac{e^{-\operatorname{arctg} t}\cdot(1+t)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}<0,\ \forall t\ge 0$, așadar F este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$, deci injectivă. Avem $F(0)=1$ și $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$, deci $\operatorname{Im}F=D=(0,1]$. Așadar F este funcție bijectivă și $(F\circ g)(x)=x,\ \forall x\in(0,1]$, de unde rezultă existența și unicitatea funcției $g=F^{-1}$ și apoi implicit existența și unicitatea funcției f, din relația $f(x)=x\cdot g(x),\forall x\in(0,1]$

b) $(ii)\Rightarrow(i)$

Fie $g:\mathbb{R}\to[0;+\infty)$, $g(x)=e^{-x}f(x)$, funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci, folosind inegalitatea $e^y\ge 1+y,\forall y\in\mathbb{R}$, rezultă că $f(x+y)=e^{x+y}g(x+y)=e^x\cdot e^y\cdot g(x+y)\ge e^x(1+y)g(x+y)$, iar pentru $y\ge 0$ din faptul că g este crescătoare avem $g(x+y)\ge g(x)$, deci $f(x+y)\ge e^x(1+y)g(x)=(1+y)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $y\in[0;+\infty)$, adică are loc (i).

$(i)\Rightarrow(ii)$

Presupunem că $f(x+y)\ge(1+y)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall y\in[0;+\infty)$. Atunci $f(x+2y)=f\left((x+y)+y\right)\ge(1+y)f(x+y)\ge(1+y)^2f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, $y\ge 0$. Prin inducție va rezulta că $f(x+ny)\ge(1+y)^nf(x),\forall x\in\mathbb{R}$, $y\ge 0$.

Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2$ și $y=x_2-x_1>0$. Avem

$$g(x_2)=e^{-x_2}f(x_2)=e^{-x_1-y}f(x_1+y)=e^{-x_1-y}f\left(x_1+n\cdot\frac{y}{n}\right)\ge e^{-x_1-y}\left(1+\frac{y}{n}\right)^nf(x_1)=\frac{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{e^y}g(x_1),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Trecând la limită pentru $n\to\infty$ și ținând cont că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=e^y$, va rezulta că $g(x_2)\ge g(x_1)$, adică g este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.