

Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XX-a
Galați, 2 noiembrie 2019

Clasa a XI -a

Problema 1.

a) Să se demonstreze că $\cos(2018 \cdot \arctg n) \in \mathbb{Q}$ și $\cos(2019 \cdot \arctg n) \notin \mathbb{Q}$ oricare ar fi n număr natural nenul.

Gelu Daniel Coadă, profesor, Galați

b) Să se determine toate perechile de numere reale (a, b) pentru care are loc egalitatea:

$$a \cdot (\cos x - 1) + b^2 = \cos(a \cdot x + b^2) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Problema 2.

Se consideră șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât

$$a_{n+1} = \frac{4 \cdot a_n + 3 \cdot b_n}{7} \quad \text{și} \quad b_{n+1} = \frac{4 \cdot a_n + 5 \cdot b_n}{9}.$$

a) Să se demonstreze că șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

b) Să se determine termenul general al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și limita sa.

Prelucrare Mariana Coadă, profesor, Galați

Problema 3.

a) Demonstrați că din progresia aritmetică infinită $a, a+r, a+2 \cdot r, \dots, a+n \cdot r, \dots$ $r \neq 0$ se poate extrage o progresie geometrică infinită dacă și numai dacă $\frac{a}{r}$ este rațional.

b) Demonstrați că din nici o progresie geometrică infinită formată din numere reale pozitive distincte, nu se poate extrage o progresie aritmetică infinită.
