**Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi**
**Societatea de Ştiinţe Matematice din România** **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
**Filiala Galaţi** **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

# Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
## ediţia a XX-a
## Galaţi, 02 noiembrie 2019

***Clasa a X-a***

**Problema 1.**

**a)** Fie $a,b,c,d \in (0,\infty)$. Să se arate că

$$a^5+b^5+c^5+d^5 \geq abcd(a+b+c+d).$$

**b)** Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Pentru $x \in \mathbb{R}$ considerăm numerele $a_1, a_2, ...a_n$ definite prin $a_k=(n-k)\cdot[x]+[kx]$, $k \in \{1,2,...,n\}$. Să se afle $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele întregi $a_1, a_2, ...a_n$ să fie consecutive.

**Vasile Popa, profesor, Galaţi**

**Problema 2.**

Fie $P$ un punct în interiorul triunghiului echilateral $\Delta ABC$ şi $P_1, P_2, P_3$ proiecţiile lui pe dreptele $BC, AC$, respectiv $AB$. Se consideră paralelele duse prin $P$, $DE, FT, HI$ la $BC, AC$, respectiv $AB$, $T, D \in AB$, $I, E \in AC$, $H, F \in BC$; $A', B', C'$ sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$ şi $G$ centrul de greutate al triunghiului $\Delta ABC$.

Să se arate că:

**a)** $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PI}\right)$;

**b)** Centrul de greutate al triunghiului $\Delta P_1P_2P_3$ este mijlocul segmentului $[PG]$;

**c)** Una dintre lungimile $P_1A', P_2B', P_3C'$ este egală cu suma celorlalte două.

*******

**Problema 3.**

**a)** Să se determine $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

**b)** Fie $x, y, z > 0$ cu $x+y+z=1$. Să se demonstreze că:

$$\frac{x^2+xyz}{y+z}+\frac{y^2+xyz}{z+x}+\frac{z^2+xyz}{x+y} \geq \frac{2}{3}$$

**Vasile Popa, profesor, Galaţi**