

Concursul Interjudețean de Matematică “Cristian S. Calude”
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
31 octombrie 2010

RUNDA I

Problema 1. Să se afle cel mai mic număr natural k astfel încât numărul $3^{2010} + k$ să fie divizibil cu 40.

Soluție: Numărul $A = 3^{2010} + k$ poate fi scris ca $A = 9^{1005} + k = M_8 + 1 + k$. Cum $40/A$, va însemna că $8/A$ și $1+k=8t \Rightarrow k=8t-1$, $t \in \mathbb{N}$. Deoarece $10/A$ și $u(3^{2010})=9$, rezultă că $u(k)=1$ deci $k \in \{1, 11, 21, 31, \dots\}$. Cel mai mic număr natural k cu proprietatea cerută este $k=31$.

Problema 2. Să se determine numerele naturale \overline{xy} , scrise în baza zece, cu proprietatea $\frac{\overline{xy}}{\overline{yx}} = 2 - \frac{y}{x}$.

Soluție: Relația din enunț se poate scrie

$$\begin{aligned} \frac{10x+y}{10y+x} = \frac{2x-y}{x} &\Leftrightarrow 10x^2 + xy = 20xy - 10y^2 + 2x^2 - xy \Leftrightarrow 8x^2 + 10y^2 - 18xy = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy - 5xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x(x-y) - 5y(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(4x-5y) = 0. \quad \text{Va rezulta că} \\ &x=y \text{ sau } 4x=5y. \quad \text{Dacă } 4x=5y \Rightarrow x=5, y=4. \quad \text{Se obțin soluțiile } \overline{xy} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 54\}. \end{aligned}$$

Problema 3. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{4x-2y-3}{2x-y-2} - \frac{3x-6y-16}{2y-x+6} = 4 \\ \frac{10y-5x+34}{x-2y-6} + \frac{4y-8x+11}{y-2x+2} = 0 \end{cases}$ în multimea numerelor reale.

Soluție: Sistemul poate fi scris ca $\begin{cases} \frac{2(2x-y-2)+1}{2x-y-2} + \frac{3(x-2y-6)+2}{x-2y-6} = 4 \\ \frac{-5(x-2y-6)+4}{x-2y-6} + \frac{4(2x-y-2)-3}{2x-y-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{1}{2x-y-2} + 3 + \frac{2}{x-y-6} = 4 \\ -5 + \frac{4}{x-2y-6} + 4 - \frac{3}{2x-y-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y-2} + \frac{2}{x-y-6} = -1 \\ \frac{4}{x-2y-6} - \frac{3}{2x-y-2} = 1 \end{cases}.$$

Notând acum $\frac{1}{2x-y-2}=a$ și $\frac{1}{x-2y-6}=b$, sistemul devine $\begin{cases} a+2b=-1 \\ -3a+4b=1 \end{cases}$, cu soluția $a=-\frac{3}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$.

Obținem sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x-y-2 = -\frac{5}{3} \\ x-2y-6 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y = \frac{1}{3} \\ x-2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{9} \\ y = -\frac{5}{9} \end{cases}$.