Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a VII-a

Problema 1. a) Arătaţi că numărul

$$a = \sqrt{9-\sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right) \cdot \left(9+\sqrt{77}\right)$$

este natural.

b) Se consideră numerele reale x şs y astfel încât $xy = 6$. Dacă $x > 2$ şi $y > 2$, arătaţi că $x + y < 5$.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Arătaţi că dacă există două numere naturale p şi q astfel încât $\sqrt{2p-q}$ şi $\sqrt{2p+q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.

b) Determinaţi câte numere naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p-4030}$ şi $\sqrt{2p+4030}$ sunt simultan numere naturale.

Problema 3. În triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii $[AC]$ şi punctul $N \in (AM)$. Paralela prin N la AB intersectează dreapta BM în P, paralela prin M la BC intersectează dreapta BN în Q, iar paralela prin N la AQ intersectează dreapta BC în S.

Demonstraţi că dreptele PS şi AC sunt paralele.

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte triunghiul isoscel ABE, cu $m(\sphericalangle ABE) = 120°$. Se notează cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului EAB, cu N piciorul perpendicularei din M pe AB, iar cu P intersecţia dreptelor CN şi MB.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABE. Demonstraţi că dreptele PG şi AE sunt paralele.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.