Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie cu proprietatea că pentru oricare $y \in [0,1]$ şi oricare $\varepsilon > 0$ există $x \in [0,1]$ astfel încât $|f(x) - y| < \varepsilon$.
a) Demonstraţi că dacă f este continuă pe $[0,1]$ atunci f este surjectivă.
b) Daţi un exemplu de funcţie f cu proprietatea din enunţ, care să nu fie surjectivă.

Problema 2. Fie două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A-B)^2 = O_2$.
a) Arătaţi că $\det(A^2 - B^2) = (\det(A) - \det(B))^2$.
b) Demonstraţi că $\det(AB - BA) = 0$ dacă şi numai dacă $\det(A) = \det(B)$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinaţi toate numerele naturale $k \geq 1$ şi $n \geq 2$ cu proprietatea că există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ şi $A^k B + BA = I_n$.

Problema 4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale din intervalul $[1, \infty)$. Presupunem că şirul $\left(y_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$, definit prin $y_n^{(k)} = \left[x_n^k\right]$, $n \geq 1$, este convergent pentru oricare $k \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. (Prin $[a]$ se notează partea întreagă a numărului real a.)

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.