

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

22 februarie 2015

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. probleme	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	<p>a).</p> $\text{Condiții: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \frac{2x-5}{2x-4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0, \infty) - \{1\} \\ x \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$ <p>Cazul 1. $x \in (0, 1)$</p> <p>Inecuația devine $\frac{2x-5}{2x-4} > 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2x-4} > 0 \Leftrightarrow x < 2;$</p> $\begin{cases} x < 2 \\ x \in (0, 1) \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 1)$ <p>Cazul 2. $x \in (1, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$</p> <p>Inecuația devine $\frac{2x-5}{2x-4} < 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2x-4} < 0 \Leftrightarrow x > 2$</p> $\begin{cases} x > 2 \\ x \in (1, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right);$ <p>Soluția : $x \in (0, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right).$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

	<p>b). Condiții: $9 - 2^x > 0 \Leftrightarrow x < \log_2 9$;</p> <p>Rezolvare: $x + \log_2(9 - 2^x) < 3 \Leftrightarrow 9 - 2^x < 2^{3-x}$;</p> <p>Notăm $2^x = y, y > 0$;</p> <p>$9 - 2^x < 2^{3-x} \Leftrightarrow y^2 - 9y + 8 > 0 \Leftrightarrow y \in (0, 1) \cup (8, \infty) \Leftrightarrow 2^x \in (0, 1) \cup (8, \infty) \Leftrightarrow$ $2^x < 1$ sau $2^x > 8 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x < \log_2 9 \\ x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, \log_2 9)$</p> <p>Soluția este $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \log_2 9)$.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2.	<p>Metoda 1.</p> <p>Fie $r = z = w \Rightarrow z \cdot \bar{z} = r^2 = w \cdot \bar{w}$;</p> <p>$1 + z = 1 + w \Rightarrow 1 + z ^2 = 1 + w ^2 \Rightarrow (1 + z) \cdot (1 + \bar{z}) = (1 + w) \cdot (1 + \bar{w}) \Rightarrow$ $1 + z + \bar{z} + z \cdot \bar{z} = 1 + w + \bar{w} + w \cdot \bar{w} \Rightarrow z + \bar{z} = w + \bar{w} \Rightarrow z - w + \frac{r^2}{z} - \frac{r^2}{w} = 0 \Rightarrow$ $(z - w) + \frac{r^2 \cdot (w - z)}{z \cdot w} = 0 \Rightarrow (z - w) \cdot (z \cdot w - r^2) = 0.$</p> <p>Dar $z \neq w$ pentru că au argumente diferite. Așadar, $z = \frac{r^2}{w} = \bar{w}$.</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>Metoda 2. Fie $z = a + b \cdot i, w = c + d \cdot i, a, c \in \mathbb{R}, b, d \in \mathbb{R}^*, z \neq w$.</p> <p>$z = w \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ $z + 1 = w + 1 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + b^2 = (c + 1)^2 + d^2 \left. \vphantom{\begin{matrix} z = w \\ z + 1 = w + 1 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow a = c \text{ și } b^2 = d^2$</p> <p>$a = c$ și $b = d \Rightarrow z = w$ - nu convine</p> <p>$z \neq w \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -d \end{cases} \Rightarrow z = \bar{w}.$</p>	
	<p>Metoda 3.</p> <p>Fie $z = r \cdot (\cos u + i \sin u), w = r \cdot (\cos v + i \sin v), u \neq v$;</p> <p>$1 + z = 1 + w \Leftrightarrow 1 + r \cdot (\cos u + i \sin u) = 1 + r \cdot (\cos v + i \sin v) \Leftrightarrow$ $(1 + r \cos u)^2 + r^2 \cdot \sin^2 u = (1 + r \cos v)^2 + r^2 \cdot \sin^2 v \Leftrightarrow$ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;</p> <p>Convine $u = -v + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \bar{w}$.</p>	

3.	<p>Se aplică inegalitatea mediilor:</p> $\frac{t^{a^2 \cdot b} + t^b}{2} \geq t^{\frac{1}{2}(a^2 \cdot b + b)};$ <p>Dar $\frac{1}{2} \cdot (a^2 \cdot b + b) \geq a \cdot b \Rightarrow \frac{t^{a^2 \cdot b} + t^b}{2} \geq t^{a \cdot b};$</p> <p>La fel $\frac{t^{a^2 \cdot b} + t^{\frac{1}{b}}}{2} \geq t^{\frac{1}{2}(a^2 \cdot b + \frac{1}{b})} \geq t^a;$</p> $\frac{t^b + t^{\frac{1}{b}}}{2} \geq t^{\frac{1}{2}(b + \frac{1}{b})} \geq t;$ <p>Am obținut $\left\{ \begin{array}{l} \frac{t^{a^2 \cdot b} + t^b}{2} \geq t^{a \cdot b} \\ \frac{t^{a^2 \cdot b} + t^{\frac{1}{b}}}{2} \geq t^a \\ \frac{t^b + t^{\frac{1}{b}}}{2} \geq t \end{array} \right.$</p> <p>Adunând aceste inegalități, se obține inegalitatea din enunț.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
4.	<p>a). Fie $z_3 - z_1 = \omega \cdot (z_2 - z_1) \Rightarrow z_3 - z_1 = z_2 - z_1 \Rightarrow AC = AB$ (1)</p> $z_3 - z_1 = \omega \cdot (z_2 - z_1) \xrightarrow{-z_2 + z_1} z_3 - z_2 = (\omega - 1) \cdot z_2 - (\omega - 1) \cdot z_1 \Rightarrow$ $z_3 - z_2 = (\omega - 1) \cdot (z_2 - z_1) \Rightarrow z_3 - z_2 = z_2 - z_1 \Rightarrow BC = AB$ (2) <p>Din (1) și (2) rezultă că triunghiul ABC este echilateral.</p> <p>b).Metoda 1.</p> $\begin{aligned} & [z_3 - z_1 - \omega \cdot (z_2 - z_1)] \cdot [z_3 - z_1 - \bar{\omega} \cdot (z_2 - z_1)] = \\ & = (z_3 - z_1)^2 - (z_3 - z_1) \cdot (z_2 - z_1) \cdot (\omega + \bar{\omega}) + (z_2 - z_1)^2 = \\ & = (z_3 - z_1)^2 - (z_3 - z_1) \cdot (z_2 - z_1) + (z_2 - z_1)^2 = \\ & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 = 0 \Rightarrow \\ & z_3 - z_1 - \omega \cdot (z_2 - z_1) = 0 \text{ sau } z_3 - z_1 - \bar{\omega} \cdot (z_2 - z_1) = 0 \Rightarrow \\ & \text{triunghiul } ABC \text{ este echilateral.} \end{aligned}$ <p>Metoda 2.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 = 0$ <p>Notăm $z_1 - z_2 = a$, $z_2 - z_3 = b$, iar relația de mai sus devine:</p> $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a \cdot b = 0 \Rightarrow$ $a_{1,2} = \frac{-b \pm bi\sqrt{3}}{2} = \frac{b \cdot (-1 \pm i\sqrt{3})}{2} \Rightarrow$ $ a = b \Rightarrow z_1 - z_2 = z_3 - z_2 \Rightarrow AB = BC.$ <p>La fel se demonstrează că $AC=BC$.</p> <p>Metoda 3.</p> $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 \cdot z_2 - z_2 \cdot z_3 - z_3 \cdot z_1 = 0 \Leftrightarrow$ $z_1^2 - (z_2 + z_3) \cdot z_1 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 \cdot z_3 = 0;$ $\Delta = (z_2 + z_3)^2 - 4 \cdot (z_2^2 + z_3^2 - z_2 \cdot z_3) = -3 \cdot (z_2 - z_3)^2$ $z_1 = \frac{z_2 + z_3 \pm i \cdot (z_2 - z_3)\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $z_1 - z_2 = \frac{z_3 - z_2 \pm i \cdot (z_2 - z_3)\sqrt{3}}{2} = (z_2 - z_3) \cdot \frac{-1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $ z_1 - z_2 = z_2 - z_3 \Rightarrow AB = BC;$ <p>Analog, obținem $AC=BC$.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
--	--	--------------------------------------