Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a). Utilizăm criteriul cleştelui: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+n}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8}}, \forall k=\overline{1,n};$ $a_n \le x_n < b_n$	**1p**
	$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^8+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{\sqrt{n^8+n}}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} \to \frac{1}{4};$	**1p**
	$b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8}} = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{n^4\cdot 4} \to \frac{1}{4};$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l} a_n \to \frac{1}{4} \\ b_n \to \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \to \frac{1}{4}.$	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

b). $y_n = n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}\right)+n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^3}{n^4}-\frac{1}{4\cdot n}\right)=u_n+v_n;$

$$u_n = n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}\right)=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3\left(n^4-\sqrt{n^8+k}\right)}{n^4\cdot\sqrt{n^8+k}}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^3\cdot\sqrt{n^8+k}\cdot\left(n^4+\sqrt{n^8+k}\right)};$$

$$|u_n|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n^4}{n^3\cdot n^8\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{n^6\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\right)}\to 0$$

$$v_n = n\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{n^4\cdot 4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{2n^3+n^2}{4\cdot n^3}\to\frac{1}{2}$$

Rezultă că $y_n\to\frac{1}{2}$.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Metoda 2. Se încadrează şirul $\left(y_n\right)_{n\ge1}$ între şirurile **:**

$$n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4+1}-\frac{1}{4}\right)\le y_n\le n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}-\frac{1}{4}\right);$$

Dar $n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4+1}-\frac{1}{4}\right)=n\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4\cdot\left(n^4+1\right)}-\frac{1}{4}\right)=n\cdot\frac{2n^3+n^2-4}{4\cdot\left(n^4+1\right)}\to\frac{1}{2};$

La fel $n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}-\frac{1}{4}\right)=n\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4\cdot n^4}-\frac{1}{4}\right)=n\cdot\frac{2n^3+n^2}{4\cdot\left(n^4+1\right)}\to\frac{1}{2}.$

Rezultă că $y_n\to\frac{1}{2}$.

</td>
<td>

2p

1p

1p

</td>
</tr>
</table>

2.	$A^2+A+I_2=\left(A+\frac{1}{2}\cdot I_2\right)^2-\left(\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot I_2\right)^2=\left(A+\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot I_2\right)\left(A+\frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot I_2\right)$. Din $\det\left(A^2+A+I_2\right)=0\Rightarrow\det\left(A+\varepsilon\cdot I_2\right)\cdot\det\left(A+\bar{\varepsilon}\cdot I_2\right)=0,\ \varepsilon=\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$. Dacă $\det\left(A+\varepsilon\cdot I_2\right)=0\Rightarrow$ prin calcul direct obţinem detA=1 şi TrA=-1. Analog pentru $\det\left(A+\bar{\varepsilon}\cdot I_2\right)=0$. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; Atunci $A+\varepsilon\cdot I_2=\begin{pmatrix}a+\varepsilon & b\\ c & d+\varepsilon\end{pmatrix}$; $\det\left(A+\varepsilon\cdot I_2\right)=0\Rightarrow$ $(a+\varepsilon)\cdot(d+\varepsilon)-b\cdot c=0\Rightarrow$ $\frac{a+d}{2}+ad-bc-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\cdot(a+d+1)=0$ şi $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $a+d=-1$ şi $ad-bc=1$; Din ecuaţia Cayley-Hamilton obţinem $A^2+A+I_2=O_2$; Adunăm în ambii membri matricea $(x-1)\cdot A$ şi obţinem $A^2+x\cdot A+I_2=(x-1)\cdot A$ şi $\det\left(A^2+x\cdot A+I_2\right)=(x-1)^2$. *Obs.* Relaţia $A^2+A+I_2=O_2$ se poate obţine arătând că rădăcinile polinomului caracteristic $f_A(X)=\det\left(A-X\cdot I_2\right)$ sunt $-\varepsilon$ şi $-\bar{\varepsilon}$, deci $f_A(X)=X^2+\left(\varepsilon+\bar{\varepsilon}\right)\cdot X+\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}=X^2+X+1$ şi $f_A(A)=O_2$.	1p 1p 2p 1p 2p
3.	Scriem matricea sub forma $A=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{q}}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{q} & \sin\frac{\pi}{q}\\ -\sin\frac{\pi}{q} & \cos\frac{\pi}{q}\end{pmatrix}$.	**1p**
	Demonstrăm prin inducţie matematică propoziţia: $P_{(n)}: A^n=\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^n}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\cdot\pi}{q} & \sin\frac{n\cdot\pi}{q}\\ -\sin\frac{n\cdot\pi}{q} & \cos\frac{n\cdot\pi}{q}\end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}^*$; Obţinem $x_n=\frac{\cos\frac{n\cdot\pi}{q}}{\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^n};\ y_n=\frac{\sin\frac{n\cdot\pi}{q}}{\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^n},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$.	**2p**

<table>
<tr><td></td><td>b). Arătăm că $\left(x_n\right)_{n\ge1}$ conţine subşiruri cu limite diferite.

Fie $x_{2nq}=\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{2nq}}\to\infty$ şi $x_{(2n+1)q}=-\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{(2n+1)q}}\to-\infty,$
deci este divergent.
Analog, pentru $\left(y_n\right)_{n\ge1}$.
Alegem subşirurile $\left(y_{2nq+1}\right)_{n\ge1},\left(y_{(2n+1)q}\right)_{n\ge1}$ şi obţinem

$y_{2nq+1}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{q}}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{2nq+1}}=\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{2nq}}\to\infty$

$y_{(2n+1)\cdot q}=\dfrac{\sin(2n+1)\pi}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{(2n+1)q}}=0\to0,$ deci $\left(y_n\right)_{n\ge1}$ este divergent.
Obs. Putem demonstra că şirurile $\left(x_n\right)_{n\ge1}$ şi $\left(y_n\right)_{n\ge1}$ sunt periodice :

$y_{n+2q}=y_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_{n+2q}=x_n,\forall n\in\mathbb{N}^*.$</td><td>2p

2p</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>a).
Pentru că $x_{n+1}\le x_n,\forall n\in\mathbb{N}$ şi f este crescătoare, avem că
$f\left(x_{n+1}\right)\le f\left(x_n\right)$, deci $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\ge0}$ este descrescător.
Din $f\left(x_n\right)>0\Rightarrow$ şirul este minorat şi conform teoremei lui Weierstrass este convergent.</td><td>2p

1p</td></tr>
</table>

	Fie $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l.$ Avem că $l\geq 0.$ Să demonstrăm că *l=0.* Presupunem prin reducere la absurd că $l>0.$ Pentru că $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi nemărginit rezultă că $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, adică $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},$ astfel încât $x_{n_\varepsilon}<-\varepsilon.$ Pentru $\forall n\geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n\leq x_{n_\varepsilon}<-\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty.$	**1p**
	Din *f* crescătoare, rezultă că există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi din caracterizarea cu şiruri a limitei, rezultă că pentru $x_n\to-\infty,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l>0.$	**1p**
	Din caracterizarea limitei, obţinem: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0,$ astfel încât din $x<-\delta_\varepsilon \Rightarrow$ $\lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon).$ Dacă alegem $\varepsilon=\frac{l}{2}\Rightarrow \exists \delta_l>0$ astfel încât pentru $x<-\delta_l \Rightarrow$ $f(x)\in\left(\frac{l}{2},\frac{3l}{2}\right);$	**1p**
	Dacă alegem $y>x, x<-\delta_l \Rightarrow \mathrm{f}(y)>f(x)>\frac{l}{2},$ adică $\mathrm{f}(x)\neq\frac{l}{4}, \forall x\in\mathbb{R},$ fals, pentru că f este surjectivă. Aşadar , *l*=0	**1p**
	Metoda 2. Din f crescătoare și surjectivă, rezultă că $\operatorname{Im} f=(0,\infty)$ și *f* continuă. (justificare) Deoarece *f* este crescătoare, rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty;$ Deoarece $x_n\to-\infty,$ folosind definiţia limitei cu şiruri, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0.$	