

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

22 februarie-2015

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
	<p>Pentru $n=2$, se obține</p> $x_1 + x_2 = \frac{4}{3} \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = 6 = 2 \cdot 3;$ $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{3} \cdot x_3 \Rightarrow x_3 = 3 \cdot 4$ <p>Atunci, presupunem că $x_n = n \cdot (n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p>	<p align="center">2p 2p 1p</p>
<p align="center">1.</p>	<p>Demonstrăm prin inducție matematică propoziția</p> <p>$P(n): x_n = n \cdot (n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$:</p> <p>1. $P(1): x_1 = 1 \cdot 2 = 2$ (A).</p> <p>2. Presupunem că $P(n)$ este adevărată și să demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată.</p> <p>$P(n+1): x_{n+1} = (n+1) \cdot (n+2)$.</p> <p>Dar</p> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) + x_{n+1} = \frac{x_{n+1} \cdot (n+3)}{3} \Rightarrow$ $\frac{n \cdot (n+1)(n+2)}{3} + x_{n+1} = \frac{x_{n+1} \cdot (n+3)}{3} \Rightarrow$ <p>$x_{n+1} = (n+1) \cdot (n+2)$ (A) $\Rightarrow P(n)$ este adevărată, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Așadar, $x_n = n \cdot (n+1), (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.</p>	<p align="center">1p 1p</p>

Metoda 2.

Deoarece egalitatea $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{x_n \cdot (n+2)}{3}$ (1) este adevărată

pentru orice număr natural nenul n , rezultă

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = \frac{x_{n+1} \cdot (n+3)}{3} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \frac{x_n \cdot (n+2)}{3} + x_{n+1} = \frac{x_{n+1} \cdot (n+3)}{3} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{1}; \frac{x_3}{x_2} = \frac{4}{2}; \frac{x_4}{x_3} = \frac{5}{3}; \dots, \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1} \Rightarrow x_n = n \cdot (n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru definirea părții întregi a unui numărului real x

2p

Scrierea identității lui Hermite

1p

$$\left[\frac{1}{1-x} \right] + \left[\frac{4-x}{3 \cdot (1-x)} \right] + \left[\frac{5-2 \cdot x}{3 \cdot (1-x)} \right] = \frac{3}{1-[x]} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{1-x} \right] + \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{1-x} + \frac{2}{3} \right] = \frac{3}{1-[x]};$$

1p

Aplicând identitatea lui Hermite \Rightarrow

$$\left[\frac{1}{1-x} \right] + \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{1-x} + \frac{2}{3} \right] \stackrel{\text{Hermite}}{=} \left[\frac{3}{1-x} \right]$$

$$\text{Dar } 1-[x] = -([x]-1) = -[x-1];$$

Ecuția devine:

$$\left[\frac{3}{1-x} \right] = -\frac{3}{[x-1]} \Leftrightarrow \left[\frac{3}{1-x} \right] \cdot [x-1] = -3;$$

1p

$$\left[\frac{3}{1-x} \right] \cdot [x-1] = -3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] \in \mathbb{Z} \\ [x-1] \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Rightarrow$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = 1 \\ [x-1] = -3 \end{array} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = -1 \\ [x-1] = 3 \end{array} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = 3 \\ [x-1] = -1 \end{array} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = -3 \\ [x-1] = 1 \end{array} \right.;$$

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = 1 \\ [x-1] = -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \frac{3}{1-x} < 2 \\ -3 \leq x-1 < -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \left[-2, -\frac{1}{2} \right) \\ x \in [-2, -1) \end{array} \right. \Rightarrow x \in [-2, -1);$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = -1 \\ [x-1] = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \frac{3}{1-x} < 0 \\ 3 \leq x-1 < 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [4, \infty) \\ x \in [4, 5) \end{array} \right. \Rightarrow x \in [4, 5);$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = 3 \\ [x-1] = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \frac{3}{1-x} < 4 \\ -1 \leq x-1 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \left[0, \frac{1}{4} \right) \\ x \in [0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{4} \right);$$

$$4. \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3}{1-x} \right] = -3 \\ [x-1] = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq \frac{3}{1-x} < -2 \\ 1 \leq x-1 < 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \left[2, \frac{5}{2} \right) \\ x \in [2, 3) \end{array} \right. \Rightarrow x \in \left[2, \frac{5}{2} \right);$$

1p

$$\text{Mulțimea soluțiilor este } S = [-2, -1) \cup \left[0, \frac{1}{4} \right) \cup \left[2, \frac{5}{2} \right) \cup [4, 5)$$

1p

	<p>Notăm $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.</p> <p>Inegalitatea din enunț devine:</p> $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \frac{a_3}{S-a_3} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} \right) +$ $+ \frac{4}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{S-a_1} + \frac{1}{S-a_2} + \frac{1}{S-a_3} + \dots + \frac{1}{S-a_n} \right) \geq \frac{S+4}{(n-1) \cdot S}$	1p
	<p>Scrierea inegalității lui Titu Andreescu Conform inegalității lui Titu Andreescu:</p> $\frac{4}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{S-a_1} + \frac{1}{S-a_2} + \frac{1}{S-a_3} + \dots + \frac{1}{S-a_n} \right) \geq \frac{4}{n^2} \cdot \frac{(1+1+1+\dots+1)^2}{n \cdot S - S} =$ $= \frac{4}{S \cdot (n-1)} \quad (1)$	1p
3.	$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \frac{a_3}{S-a_3} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} =$ $= \frac{a_1^2}{S \cdot a_1 - a_1^2} + \frac{a_2^2}{S \cdot a_2 - a_2^2} + \frac{a_3^2}{S \cdot a_3 - a_3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{S \cdot a_n - a_n^2} \geq$ $\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2}{S^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)} =$ $= \frac{S^2}{S^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)}.$ <p>Înmulțim relația cu $\frac{1}{n}$, obținem:</p>	2p

	$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \frac{a_3}{S-a_3} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} \right) \geq$ $\geq \frac{S^2}{n \cdot S^2 - n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)} \quad (2)$ <p>Dar $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \leq n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$ (CBS) \Rightarrow</p> $-n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \leq -(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 = -S^2 \Rightarrow$ $n \cdot S^2 - n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \leq n \cdot S^2 - S^2 = (n-1) \cdot S^2 \Rightarrow$ $\frac{S^2}{n \cdot S^2 - n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)} \geq \frac{S^2}{(n-1) \cdot S^2} = \frac{1}{n-1} \quad (3)$ <p>Din (2) și (3) $\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \frac{a_3}{S-a_3} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} \right) \geq \frac{1}{n-1}$ (4)</p> <p>Prin adunarea inegalităților (1) și (4), rezultă inegalitatea cerută</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
4.	<p>Notăm $\frac{CQ}{CM} = k \Rightarrow \overrightarrow{CQ} = k \cdot \overrightarrow{CM}$;</p> $\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NP} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AC} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{6}{5} \cdot \overrightarrow{AC};$ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MQ}{CM} \cdot \overrightarrow{CM};$ $\frac{CQ}{CM} = k \Rightarrow \frac{CM + MQ}{CM} = k \Rightarrow \frac{MQ}{CM} = k - 1;$ $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB};$ $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + (k-1) \cdot \left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \right) = \frac{k}{3} \cdot \overrightarrow{AB} - (k-1) \cdot \overrightarrow{AC};$ <p>Definirea coliniarității a doi vectori</p> <p>Vectorii \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} sunt coliniari $\Rightarrow \frac{-2}{\frac{k}{3}} = \frac{\frac{6}{5}}{-(k-1)} \Rightarrow k = \frac{5}{4}$.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>