Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

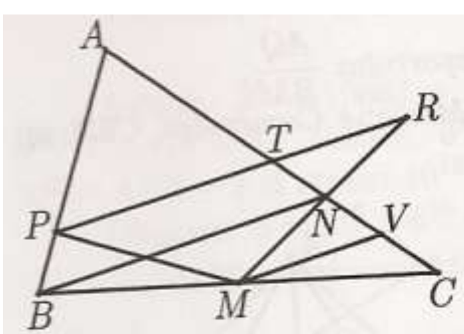
Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- ♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- ♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) $a=\sqrt{3^{2015}-2\cdot 3^{2014}-2\cdot 3^{2013}-...-2\cdot 3-2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\left\|\sqrt{5}-3\right\|=$ $\sqrt{3^{2015}-2\cdot\left(3^{2014}+3^{2013}+...+3+1\right)}-\left\|2-\sqrt{5}\right\|-\left\|\sqrt{5}-3\right\|=$ $\sqrt{3^{2015}-\left(3^{2015}-1\right)}+2-\sqrt{5}+\sqrt{5}-3=0.$ $b=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=$ $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$ $a<b$	1p 1p 1p 1p
	b) $\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{15}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}}\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}\right)=2\cdot\sqrt{15}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{5}\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}\right)=2\cdot\sqrt{15}\Leftrightarrow$ $5\cdot\sqrt{15}-15+15-3\cdot\sqrt{15}=2\cdot\sqrt{15}\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{15}=2\cdot\sqrt{15}$	**2p** **1p**
2.a	a) Din formula $EF=\frac{AB+CD}{2}$, obţinem $AB+CD=2\cdot EF=2\cdot 4\text{ cm}=8\text{ cm}$	**1p**

	Deci, $P_{ABCD}=20\text{ cm}\Leftrightarrow AB+CD+2\cdot AD=20\text{ cm}\Leftrightarrow 8\text{ cm}+2\cdot AD=20\text{ cm}\Leftrightarrow AD=6\text{ cm}$. $[OE]$ este mediană în triunghiul dreptunghic ΔOAD, deci $OE=\frac{AD}{2}=\frac{6\text{ cm}}{2}=3\text{ cm}$. Analog, $OF=3\text{ cm}$. Prin urmare, $P_{\Delta OEF}=OE+OF+EF=3\text{ cm}+3\text{ cm}+4\text{ cm}=10\text{ cm}$.	**1p** 2p
2b	**b)** Notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$. Deoarece triunghiurile ΔOAB şi ΔOCD sunt dreptunghice isoscele, deducem că $OM=\frac{AB}{2}$, $ON=\frac{CD}{2}$, $OM\perp AB$, $ON\perp CD$.	**2p**
	Adăugând $AB\parallel CD$ obţinem că punctele O,M şi N sunt coliniare şi $h=MN=OM+ON==\frac{AB+CD}{2}=\frac{8\text{ cm}}{2}=4\text{ cm}$, unde cu h am notat lungimea înălţimii trapezului $ABCD$. Prin urmare, $A_{ABCD}=\frac{(AB+CD)\cdot h}{2}=\frac{8\text{ cm}\cdot 4\text{ cm}}{2}=16\text{ cm}^2$.	1p
3.	**a)** Avem că $\overline{a,(ba)}+\overline{b,(ab)}+\overline{a,b(a)}=\frac{\overline{aba}-a}{99}+\frac{\overline{bab}-b}{99}+\frac{\overline{aba}-\overline{ab}}{90}=$ $\frac{110\cdot a+110\cdot b}{99}+\frac{91\cdot a+9\cdot b}{90}=$ $=\frac{191\cdot a+109\cdot b}{90}$. Pentru ca fracţia zecimală să fie finită este necesar ca 9 să dividă numărul natural $191\cdot a+109\cdot b$, ceea ce este echivalent cu 9 divide $2\cdot a+b$. Dar, $3\le 2\cdot a+b\le 25$, de unde rezultă că $2\cdot a+b=9$ sau $2\cdot a+b=18$. Se obţin soluţiile $(a,b)\in\{(1;7),(2;5),(3;3),(4;1),(5;8),(6;6),(7;4);(8;2)\}$.	**2p** 1p 1p

	b) Din ipoteză avem $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014 \Leftrightarrow 2015\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=2014 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2014}{2015}$. Deci, $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{y+2-2}{y+2}+\frac{z+3-2}{z+3}=$ $1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{y+2}+1-\frac{2}{z+3}=$ $=3-\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2}{y+2}+\frac{2}{z+3}\right)=3-2\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=$. $3-2\cdot\frac{2014}{2015}=\frac{2017}{2015}$	**1p** 1p 1p
4.	Fie V mijlocul segmentului $[NC]$. Din $AN+NC=AC$ şi $AN=2\cdot NC$ deducem $AN=\frac{2\cdot AC}{3}$. Cum $AT=\frac{AC}{2}$ rezultă $TN=\frac{AC}{6}$, relaţie pe care o notăm pe (1). Din $NC=\frac{AC}{3}$	**2p**
	şi V este mijlocul lui rezultă $NV=\frac{AC}{6}$, relaţie care o notăm cu (2). Din relaţiile (1) şi (2) rezultă $TN=NV$ şi cum $MN=NR$ deducem că $MVRT$ este paralelogram, deci $MV \parallel RT$, relaţie pe care o notăm cu (3). Pe de altă parte, din $\frac{AP}{PB}=\frac{AT}{TN}=3$, cu teorema reciprocă a lui  	**3p**

	Thales în triunghiul ΔABN rezultă $PT \parallel BN$, relaţie pe care o notăm cu (4). Dar, MV este linie mijlocie în triunghiul ΔCBN, deci $MV \parallel BN$, relaţie pe care o notăm cu (5). Din relaţiile (4) şi (5) rezultă $MV \parallel PT$ şi adăugând la acesta relaţia (3) deducem că punctele P, T, R sunt coliniare.	**2p**