Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie-2015

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
	a). $\begin{cases} 3x-5=0 \\ 3x+5=0 \\ 9x^2+30x+25=0 \\ 44-x=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 44\right\}$	**1p**
	b). $E(x)=\frac{4\cdot(3x-5)-5\cdot(3x+5)+4x+1}{(3x+5)\cdot(3x-5)}:\frac{44-x}{(3x+5)^2}+3$ $E(x)=\frac{12x-20-15x-25+4x+1}{(3x+5)\cdot(3x-5)}\cdot\frac{(3x+5)^2}{44-x}+3$ $E(x)=\frac{x-44}{3x-5}\cdot\frac{3x+5}{44-x}+3$ $E(x)=\frac{3x+5}{5-3x}+3$ $E(x)=\frac{2\cdot(3x-10)}{3x-5}$.	**2p**

	c). $E\left(x\right)\in\mathbb{N}\Rightarrow\dfrac{2\cdot\left(3x-10\right)}{3x-5}\in\mathbb{N}\Rightarrow\left(3x-5\right)/\,2\cdot\left(3x-10\right)\Rightarrow$ $\left(3x-5\right)/\,2\cdot\left(3x-5\right)-10\Rightarrow$ $\left(3x-5\right)/\,10\Rightarrow\left(3x-5\right)\in\left\{-10,-5,-2,-1,1,2,5,10\right\}\Rightarrow$ $3x\in\left\{-5,0,3,4,6,7,10,15\right\}\Rightarrow$ $x\in\left\{0,1,\dfrac{4}{3},2,\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3},5\right\}$ $\begin{cases}x\in\left\{0,1,\dfrac{4}{3},2,\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3},5\right\}\\ x\in\mathbb{Z}-\left\{44\right\}\end{cases}\Rightarrow x\in\left\{0,1,2,5\right\}$ $x=0\Rightarrow E\left(0\right)=4\in\mathbb{N}$ $x=1\Rightarrow E\left(1\right)=7\in\mathbb{N}$ $x=2\Rightarrow E\left(2\right)=-8\notin\mathbb{N}$ $x=5\Rightarrow E\left(5\right)=1\in\mathbb{N}$ Soluţia: $x\in\left\{0,1,5\right\}$	**1p** **1p** **1p** **1p**
2.	$x^3y-6x^2+xy=6\Leftrightarrow x^2\cdot\left(xy-6\right)+\left(xy-6\right)=0\Leftrightarrow\left(xy-6\right)\cdot\left(x^2+1\right)=0\Rightarrow$ $xy-6=0\Rightarrow xy=6;$ $\begin{cases}xy=6\\ x,y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=6\end{cases}sau\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}sau\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}sau\begin{cases}x=-1\\ y=-6\end{cases}sau$ $\begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}sau\begin{cases}x=-3\\ y=-2\end{cases}sau$ $\begin{cases}x=6\\ y=1\end{cases}sau\begin{cases}x=-6\\ y=-1\end{cases}$ Mulţimea soluţiilor este: $\left\{\left(1,6\right),\left(2,3\right),\left(3,2\right),\left(6,1\right),\left(-1,-6\right),\left(-2,-3\right),\left(-3,-2\right),\left(-6,-1\right)\right\}$	**1p** **1p**
	b). $E(x)=\dfrac{2x^2-4x+9}{x^2-2x+6}=\dfrac{2\cdot\left(x^2-2x+6\right)-3}{x^2-2x+6}=2-\dfrac{3}{x^2-2x+6}=2-\dfrac{3}{\left(x-1\right)^2+5}$	**2p**
	$E\left(x\right)$ este minimă dacă $\dfrac{3}{\left(x-1\right)^2+5}$ este maximă; $\dfrac{3}{\left(x-1\right)^2+5}$ este maximă dacă $\left(x-1\right)^2+5$ este minimă $\Rightarrow\left(x-1\right)^2=0\Rightarrow x=1\Rightarrow$ $E\left(x\right)$ este minimă pentru x=1 $\Rightarrow$ valoarea minimă este $E\left(1\right)=\dfrac{7}{5}$.	**1p** **1p** **1p**
3.	Adunând egalităţile, obţinem:	

	$12\cdot z\cdot\sqrt{6}-2\cdot x^2-68+6\cdot y\cdot\sqrt{3}-6\cdot z^2+18+4\cdot x\cdot\sqrt{2}-3\cdot y^2+1=0\Leftrightarrow$ $-12\cdot z\cdot\sqrt{6}+2\cdot x^2+68-6\cdot y\cdot\sqrt{3}+6\cdot z^2-18-4\cdot x\cdot\sqrt{2}+3\cdot y^2-1=0\Leftrightarrow$ $2\cdot\left(x^2-2x\sqrt{2}+2\right)+3\cdot\left(y^2-2\cdot y\cdot\sqrt{3}+3\right)+6\cdot\left(z^2-2\cdot z\cdot\sqrt{6}+6\right)=0\Leftrightarrow$ $2\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)^2+3\cdot\left(y-\sqrt{3}\right)^2+6\cdot\left(z-\sqrt{6}\right)^2=0;$ $\begin{cases}2\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\\3\cdot\left(y-\sqrt{3}\right)^2\geq 0,\forall y\in\mathbb{R}\\6\cdot\left(z-\sqrt{6}\right)^2\geq 0,\forall z\in\mathbb{R}\\2\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)^2+3\cdot\left(y-\sqrt{3}\right)^2+6\cdot\left(z-\sqrt{6}\right)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(x-\sqrt{2}\right)^2=0\\\left(y-\sqrt{3}\right)^2=0\\\left(z-\sqrt{6}\right)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{3}\\z=\sqrt{6}\end{cases}$ $\frac{4\cdot x}{\sqrt{2}}+\frac{5\cdot y}{\sqrt{3}}+\frac{7\cdot z}{\sqrt{6}}=4+5+7=16=4^2\in\mathbb{N}.$	**3p** **2p** **2p**
4.	a). Fie $AC\cap BD=\{O\}$. Dacă simetricul lui C faţă de B este P, atunci PB=BC=AD şi adăugând BC$\parallel$ AD , deducem că APBD este paralelogram. Cum AD$\perp$BD, obţinem APBD dreptunghi, iar de aici DA$\perp$AP. Având şi DM$\perp$(ABC) deducem, conform teoremei celor trei perpendiculare, că MA$\perp$AP.Construim DH$\perp$MA, afirmaţie care, împreună cu MA$\perp$AP şi DA$\perp$AP ne duce la concluzia că DH $\perp$(MAP) (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare). Se calculează DH ca înălţime a triunghiului dreptunghic DAM şi se obţine DH=d(D,(MAP))=$\frac{2}{3}$ a$\sqrt{3}$.	**1p** **1p** **1p**

Fie Q mijlocul lui (AB). Rezultă că NQ=$\frac{1}{2}AB$=$\frac{1}{2}DP$. Rezultă că triunghiul DNP este dreptunghic în N. **1p**

Construind cercul de diametru [DP], acesta va avea şi diametrul [AB] şi va conţine punctele A,B,P,N,D. Dacă diagonalele AC şi BD formează un unghi de 45^0, rezultă că $m(\measuredangle NOB) = m(\measuredangle OBN) = 45°$.Unghiurile OBN şi DPN au ca măsură jumătate din măsura arcului DN şi deci, triunghiul DNP este triunghi dreptunghic isoscel. Avem încă DB= 2 DO= =2AD= 4a, iar de aici AB=DP= 2a$\sqrt{5}$ iar DN=NP=a$\sqrt{10}$. **2p**

Aplicăm teorema celor 3 perpendiculare şi, din DM$\perp$**(**ABC), DN$\perp$PN, DN şi PN incluse în planul (ABC), deducem MN$\perp$PN, de unde rezultă că d(M,NP) este MN. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MNP, obţinem MN = 2 a$\sqrt{3}$. **1p**

Metoda 2- determinarea lungimii segmentului $[DN]$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle\text{ANB, m}(\measuredangle N) = 90° \\ [AQ] \equiv [QB]\end{array}\right\} \Rightarrow NQ = \dfrac{AB}{2} \\ \text{Dar ADBP dreptunghi: } [AB] \equiv [DP]\end{array}\right\} \Rightarrow NQ = \frac{DP}{2}$$

$$\text{Din } \begin{cases} NQ = \dfrac{DP}{2} \\ [DQ] \equiv [QP] \end{cases} \Rightarrow m(\measuredangle DNP) = 90° \Rightarrow DN \perp PN;$$

$$\text{În } \triangle DOA: m(\measuredangle ADO) = 90° \overset{T.P}{\Rightarrow} AO = 2a\sqrt{2};$$

$$\text{În } \triangle DOA \begin{cases} m(\measuredangle ADO) = 90° \\ [AD] \equiv [DO] \\ fie\ DE \perp AC, E \in (AO) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [AE] \equiv [EO] \\ DE = \dfrac{AO}{2} = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow EO = \frac{AO}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow EN = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{În } \triangle DEN: m(\measuredangle DEN) = 90° \overset{T.P}{\Rightarrow} DN = a\sqrt{10}.$$