Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a XI-a

Problema 1.

Să se demonstreze că :

a). $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}}=\frac{1}{4}$

b). $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

Problema 2.

Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia: $\det\left(A^2+A+I_2\right)=0.$

Să se demonstreze că $\det\left(A^2+x\cdot A+I_2\right)=(x-1)^2,(\forall)x\in\mathbb{R}.$

Problema 3.

Fie $q\in\mathbb{N},\ q\geq 3$ şi $A\in M_2(\mathbb{R}),\ A=\begin{pmatrix} ctg\frac{\pi}{q} & 1 \\ -1 & ctg\frac{\pi}{q}\end{pmatrix}.$

a). Să se determine şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, astfel încât

$A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ -y_n & x_n\end{pmatrix}.$

b). Să se demonstreze că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt divergente.

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ o funcţie crescătoare şi surjectivă, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale descrescător nemărginit.

a). Să se arate că şirul $\left(f(x_n)\right)_{n\geq 0}$ este convergent.

b). Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n).$