MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. La cercul de robotică al unei școli, elevii lucrează în echipe complete de câte trei băieți și o fată. Într-o zi, au lipsit două fete și un băiat, iar elevii au fost regrupați astfel încât în fiecare echipă nou-formată au fost câte o fată și patru băieți.

Câți elevi sunt înscriși la cercul de robotică al acelei școli?

Soluție. Dacă elevii lucrează în echipe de câte o fată și trei băieți, înseamnă că se pot grupa astfel: (F, B, B, B) (F, B, B, B) (F, B, B, B) . . . . . (F, B, B, B) **1p**

Când lipsesc două fete și un băiat, două grupe rămân incomplete (mutând un băiat dintr-o grupă în alta dacă băiatul absent nu face parte din aceeași grupă cu una dintre fetele absente):

$(\cancel{F}, \cancel{B}, B, B)$ $(\cancel{F}, B, B, B)$ (F, B, B, B) . . . . . (F, B, B, B) **1p**

Cum fiecare grupă nouă conține câte o singură fată, cei 2+3 băieți rămași din grupele incomplete trebuie regrupați astfel încât să completeze grupele cu câte 3 băieți și o fată până la patru băieți, așadar câte încă unul în fiecare grupă. **2p**

Deoarece toate grupele nou formate conțin exact câte 4 băieți și o fată, deducem că au fost formate exact 5 astfel de grupe. Așadar, în ziua în care au lipsit cei trei copii, au fost prezenți $5 \cdot 4 = 20$ băieți și 5 fete. **2p**

Așadar, la cercul de robotică sunt înscriși $20 + 1 = 21$ de băieți și $5 + 2 = 7$ fete, în total 28 de elevi. **1p**

Soluție alternativă.

Dacă f este numărul fetelor de la cercul de robotică, numărul băieților este egal cu $3f$. **1p**

Când lipsesc două fete și un băiat, numărul fetelor devine $f - 2$, iar al băieților $3f - 1$. **1p**

Dacă elevii se pot regrupa astfel încât fiecare grupă să conțină o fată și patru băieți, atunci $4 \cdot (f - 2) = 3f - 1$ **2p**

Obținem $4f - 8 = 3f - 1$, de unde $f = 7$ **2p**

În consecință, numărul băieților este $3 \cdot 7 = 21$, deci la cercul de robotică sunt $7 + 21 = 28$ de elevi **1p**

Problema 2. Se consideră numărul $n = 2^x + 2^y + 2^z + 2^t$, unde x, y, z, t sunt numere naturale distincte. Împărțind numărul n la 305, se obține câtul 2^a și restul 0, unde a este un număr natural.

Determinați restul împărțirii sumei $a + x + y + z + t$ la 5.

Gazeta Matematică

Soluție. Presupunem, fără a restrânge generalitatea problemei, că $x < y < z < t$.

Atunci $2^x + 2^y + 2^z + 2^t = 305 \cdot 2^a$, de unde $2^x \cdot (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x}) = 305 \cdot 2^a$, (1) . . . **1p**

Cum $x < y < z < t$, rezultă că $y - x$, $z - x$ și $t - x$ sunt numere naturale nenule, deci 2^{y-x}, 2^{z-x}, 2^{t-x} sunt numere pare, iar $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x}$ este impar. **1p**

Din motive de paritate, din relația (1) deducem că $2^x = 2^a$ și $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 305$, deci $x = a$, iar $2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 304$ **2p**

Obținem $2^{y-x} \cdot (1 + 2^{z-y} + 2^{t-y}) = 2^4 \cdot 19$, de unde $y - x = 4$, deci $y = a + 4$ **1p**

În plus, $1 + 2^{z-y} + 2^{t-y} = 19$, deci $2^{z-y}(1 + 2^{t-z}) = 2 \cdot 9$, de unde reiese că $z - y = 1$ și $t - z = 3$, adică $z = y + 1 = a + 5$ și $t = z + 3 = a + 8$ **1p**

Ca urmare, $a+x+y+z+t = a+a+(a+4)+(a+5)+(a+8) = 5a+17 = 5\cdot(a+3)+2$, deci restul împărțirii sumei $a + x + y + z + t$ la 5 este egal cu 2 .... **1p**

Problema 3. Pe ecranul monitorului unui calculator sunt afișate toate numerele naturale de la 1 la 2025. Un virus șterge o parte dintre aceste numere după următorul algoritm:

- la pasul 1 se șterge un număr dintre cele afișate pe ecran și succesorul acestuia;
- la fiecare nou pas, dintre numerele rămase pe ecran după pasul precedent se șterg două numere, astfel încât unul dintre numerele șterse să fie succesorul celuilalt număr șters.

Algoritmul se oprește după 674 de pași.

a) Arătați că suma numerelor rămase pe ecran nu este divizibilă cu 6.

b) Arătați că produsul numerelor rămase pe ecran este divizibil cu 6.

Soluție. a) La fiecare pas, se șterg câte două numere consecutive, adică un număr par și un număr impar. După 674 de pași, se șterg 674 de numere pare și 674 de numere impare. ... **1p**

Deoarece pe ecran sunt scrise inițial 1012 numere pare și 1013 numere impare, pe ecran rămân 338 de numere pare și 339 de numere impare **1p**

Întrucât suma unui număr impar de numere impare este un număr impar, deducem că suma numerelor rămase pe ecran este un număr impar, care nu poate fi divizibil cu 6 .... **1p**

b) Dintre două numere naturale consecutive, cel mult unul este multiplu de 3, deci la fiecare dintre cei 674 de pași se șterge cel mult un multiplu de 3 .... **1p**

Deoarece printre numerele de la 1 la 2025 se află 675 de multipli de 3, la oprirea algoritmului rămâne pe ecran cel puțin un număr natural divizibil cu 3, adică un număr m de forma $m = 3a$, unde a este număr natural nenul **1p**

Alegând un număr par n, $n = 2b$, unde b este număr natural nenul, dintre cele 338 de numere pare rămase pe ecran, deducem că produsul numerelor rămase pe ecran conține factorul $m \cdot n = 6 \cdot a \cdot b$, deci este divizibil cu 6 .... **2p**

Problema 4. Andrei scrie numărul 2025 ca sumă de 40 de numere naturale nenule, oricare două diferite.

Determinați care este cea mai mică valoare pe care o poate lua cel mai mare dintre cele 40 de numere din sumă.

Soluție. Fie $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{40}$ astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{40} = 2025$.

Atunci $a_2 \geqslant a_1 + 1$, $a_3 \geqslant a_2 + 1$, $a_4 \geqslant a_3 + 1$, ..., $a_{40} \geqslant a_{39} + 1$ **1p**

În consecință, $a_{40} \geqslant a_1 + 39$, $a_{40} \geqslant a_2 + 38$, ..., $a_{40} \geqslant a_{38} + 2$ **2p**

Atunci $40 \cdot a_{40} \geqslant (a_1 + 39) + (a_2 + 38) + \ldots + (a_{37} + 3) + (a_{38} + 2) + (a_{39} + 1) + a_{40}$, deci $40 \cdot a_{40} \geqslant 2025 + (1 + 2 + \ldots + 39) = 2805$, iar cum $a_{40} \in \mathbb{N}$, deducem că $a_{40} \geqslant 71$ **2p**

Întrucât 2025 se poate scrie ca suma a 40 de numere naturale nenule distincte astfel încât cel mai mare dintre ele să fie 71, de exemplu $1 + 29 + 34 + 35 + 36 + \ldots + 70 + 71 = 2025$, rezultă că cea mai mică valoare posibilă a lui a_{40} este 71 .... **2p**