Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a VII-a – soluții

Problema 1. Determinați numerele naturale de patru cifre $\overline{abcd}$ pentru care numărul $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{cd}}$ este pătratul unui număr prim p, iar $\overline{cd}-\overline{ab}=p+2$.

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $p^2=\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{cd}}<10+10=20$, numărul p poate fi 2 sau 3 ...... **3p**

Dacă $p=2$, atunci $\overline{cd}=\overline{ab}+4$ și $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{ab}+4}=4$, (1). Ecuația (1) are soluția $\overline{ab}=5$, care este și unică (alte numere sunt fie prea mari, fie prea mici), valoare care nu convine ... **2p**

Dacă $p=3$, atunci $\overline{cd}=\overline{ab}+5$ și $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{ab}+5}=9$, (2). Ecuația (2) are soluția $\overline{ab}=20$, care este și unică (același argument ca mai sus) și obținem $\overline{abcd}=2025$ **2p**

Altă soluție. Deoarece $\overline{ab}-4$ și $\overline{cd}$ sunt numere naturale și $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{cd}}\in\mathbb{N}$, rezultă că există $k,n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\overline{ab}-4=k^2$ și $\overline{cd}=n^2$, deci $k+n=p^2$. (1) **2p**

Cum $\overline{cd}-\overline{ab}=p+2$, scăzând primele două egalități obținem $p+6=n^2-k^2=(n-k)(n+k)$. Folosind (1) deducem că $p+6=(n-k)\cdot p^2$, prin urmare $p\mid(p+6)$, deci $p\in\{2,3\}$ **1p**

Dacă $p=2$, obținem $k+n=4$ și $n-k=2$, deci $k=1$ și $n=3$, așadar $\overline{ab}=5$, fals **2p**

Dacă $p=3$, obținem $k+n=9$ și $n-k=1$, deci $k=4$ și $n=5$, așadar $\overline{ab}=20$ și $\overline{cd}=25$, care verifică ipoteza. Prin urmare, numărul căutat este 2025 .... **2p**

Problema 2. Determinați mulțimea numerelor raționale r pentru care există numerele naturale nenule a și b astfel încât $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{a\cdot b}=r$.

Soluție. Pentru $r\in\mathbb{Q}$ și $a,b\in\mathbb{N}^*$ ca în enunț, $r=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$, deci $r\geqslant 0$.......... **2p**

De asemenea, ab trebuie să fie pătratul unui număr natural n. Rezultă $r=\dfrac{a+b-2n}{2}=\dfrac{m}{2}$, unde m este număr întreg, deci r este un număr de forma $\dfrac{m}{2}$, cu $m\in\mathbb{N}$.................... **2p**

Reciproc, pentru $a=b=1$ obținem $r=0$, iar pentru $a=m$ și $b=4m$, cu $m\in\mathbb{N}^*$, obținem $r=\dfrac{5m}{2}-2m=\dfrac{m}{2}$, cu $m\in\mathbb{N}^*$. Astfel, mulțimea cerută conține toate numerele de forma $\dfrac{m}{2}$, cu $m\in\mathbb{N}$.. **2p**

Mulțimea cerută este $\left\{\dfrac{m}{2}\,\middle|\, m\in\mathbb{N}\right\}$ **1p**

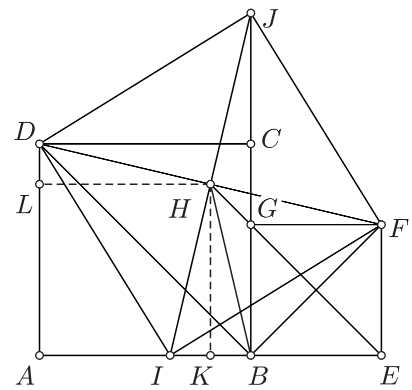
Problema 3. Considerăm pătratele $ABCD$ și $BEFG$, astfel încât B se află pe segmentul (AE) și G se află pe segmentul (BC). Fie H intersecția dreptelor DF și EG. Perpendiculara în H pe DF taie dreptele AE și BC în punctele I, respectiv J. Arătați că patrulaterul $DIFJ$ este pătrat.

Soluție. $\sphericalangle GBF=\sphericalangle DBC=45°$, deci triunghiul DBF este dreptunghic în B. Cum EG este mediatoarea catetei BF a triunghiului BDF, reiese că H este mijlocul ipotenuzei DF . **2p**

Fie K proiecția lui H pe AE. Deoarece H este mijlocul lui DF și $HK\parallel AD$, rezultă că HK este linie mijlocie în trapezul dreptunghic $AEFD$, prin urmare K este mijlocul segmentului AE. Rezultă că $\triangle HAE$ este isoscel, deci $\sphericalangle HAE=\sphericalangle HEA=45°$, adică $H\in AC$ **2p**

Fie L proiecția lui H pe AD. Atunci $\triangle HAK \equiv \triangle HAL$ (I.U.), deci $HK = HL$. Apoi $\sphericalangle KHI + \sphericalangle IHL = 90^\circ = \sphericalangle DHL + \sphericalangle IHL$ implică $\sphericalangle KHI = \sphericalangle LHD$, de unde $\triangle HKI \equiv \triangle HLD$ (C.U.), deci $HI = HD$ **2p**

Avem și $\triangle HAB \equiv \triangle HAD$ (L.U.L.), deci $HB = HD = HI$. Reiese că punctul K este mijlocul segmentului BI, KH este linie mijlocie în $\triangle IBJ$, iar H este mijlocul segmentului IJ. Astfel diagonalele patrulaterului $DIFJ$ sunt egale, se taie în părți egale și sunt perpendiculare, deci $DIFJ$ este pătrat **1p**



Altă soluție. Ca mai sus, H este mijlocul lui DF **2p**

Dreapta IJ este mediatoarea segmentului DF, deci $DI = IF$ **1p**

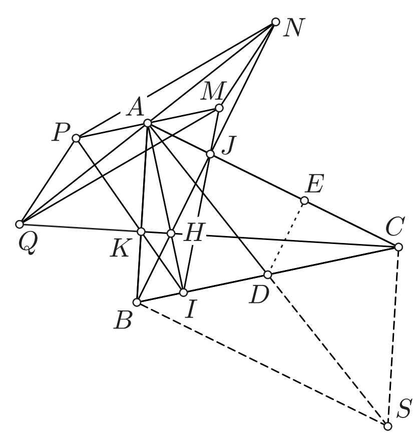
$\sphericalangle IHF = \sphericalangle IEF = 90^\circ$, deci patrulaterul $IEFH$ este inscriptibil, așadar $\sphericalangle IFH = \sphericalangle IEH = 45^\circ$. Cum triunghiul IFD este isoscel, obținem $\sphericalangle IFD = \sphericalangle IDF = 45^\circ$ și $\sphericalangle DIF = 90^\circ$ **2p**

Pentru a arăta că $DIFJ$ este pătrat, rămâne să dovedim că segmentele DF și IJ au același mijloc. Fie K proiecția lui H pe AE. Din $\sphericalangle AID + \sphericalangle EIF = 90^\circ$ obținem $\sphericalangle AID = \sphericalangle EFI$, deci $\triangle AID \equiv \triangle EFI$ (I.U.), așadar $AI = EF = BE$. Astfel, K este mijlocul segmentului IB. Cum $HK \parallel BJ$, deducem că HK este linie mijlocie în triunghiul BIJ, deci H este și mijlocul segmentului IJ **2p**

Problema 4. Considerăm un triunghi ascuțitunghic ABC, cu $AB < AC$ și punctele D, I, J, K, astfel încât D este mijlocul laturii BC, iar I, J, K sunt picioarele înălțimilor din A, B, respectiv C ale acestuia. Perpendiculara în A pe dreapta AD intersectează dreptele BJ și CK în punctele N, respectiv Q, iar paralela prin A la BC intersectează dreptele IJ și IK în punctele M, respectiv P. Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Soluție. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Patrulaterele $BIHK$ și $CIHJ$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle HIK = \sphericalangle HBK = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle JCH = \sphericalangle HIJ$, așadar IA este bisectoarea unghiului JIK. Cum $IA \perp BC$ și $MP \parallel BC$, reiese $IA \perp MP$. Deducem că IA este bisectoare și înălțime în $\triangle IMP$, deci acesta este isoscel și A este mijlocul segmentului MP **3p**

Fie S simetricul lui A față de punctul D. Deoarece D este și mijlocul segmentului BC, rezultă că $ABSC$ este paralelogram. Reiese $BS \parallel AC$ și, cum $BJ \perp AC$, deducem că $BJ \perp BS$. Din $\sphericalangle SBN = \sphericalangle SAN = 90^\circ$ rezultă că patrulaterul $SBAN$ este inscriptibil, prin urmare $\sphericalangle NSA = \sphericalangle ABN = 90^\circ - \sphericalangle A$. Analog rezultă $\sphericalangle QSA = \sphericalangle ACQ = 90^\circ - \sphericalangle A$, deci $\sphericalangle QSA = \sphericalangle NSA$. Astfel, în triunghiul SNQ, înălțimea SA este și bisectoare, prin urmare A este mijlocul laturii NQ **3p**



Diagonalele patrulaterului $MNPQ$ se înjumătățesc, așadar $MNPQ$ este paralelogram .. **1p**

Alternativă la partea a doua (**3p**). Fie E proiecția lui D pe AC. Avem $\sphericalangle DEA = \sphericalangle AJN = 90^\circ$ și $\sphericalangle DAE = 90^\circ - \sphericalangle NAJ = \sphericalangle ANJ$, deci $\triangle DAE \sim \triangle ANJ$. Rezultă $\dfrac{NA}{AD} = \dfrac{AJ}{DE} = 2\dfrac{AJ}{BJ}$; analog, $\dfrac{QA}{AD} = 2\dfrac{AK}{CK}$. Din $\triangle ABJ \sim \triangle ACK$ (U.U.) rezultă $\dfrac{AJ}{BJ} = \dfrac{AK}{CK}$, de unde $AQ = AN$.