



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Fie mulțimile

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x + y + 1 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x^3 + y^3 + 1 = 3xy\}.$$

- a) Arătați că $A \subset B$.
- b) Arătați că mulțimea $B \setminus A$ are exact un element.

Soluție. a) Dacă $(x, y) \in A$, atunci $y = -x - 1$ **2p**
 Reiese $x^3 + y^3 + 1 = x^3 - (x + 1)^3 + 1 = 3x(-x - 1) = 3xy$, deci $(x, y) \in B$ **2p**

b) Dacă $(x, y) \in B$, atunci $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$, deci $(x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3xy + 1 = 0$, sau $(x + y + 1)((x + y)^2 - (x + y) + 1) - 3xy(x + y + 1) = 0$, sau $(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) = 0$.
 Pentru ca $(x, y) \in B \setminus A$ trebuie ca $x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$, de unde $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$, adică $x = y = 1$. Cum $(1, 1) \notin A$, reiese $B \setminus A = \{(1, 1)\}$ **3p**

Variantă pentru b). Observăm că $(1, 1) \in B \setminus A$ **1p**

Fie $(x, y) \in B$, $x = 1 + a$, $y = 1 + b$. Atunci $a^3 + b^3 + 3a^2 + 3b^2 - 3ab = 0$, sau $(a + b)(a^2 - ab + b^2) - 3(a^2 - ab + b^2) = 0$, deci $(a + b - 3)(a^2 - ab + b^2) = 0$. Dacă $a + b - 3 = 0$, atunci $x + y + 1 = 0$ și $(x, y) \in A$. Dacă $a^2 - ab + b^2 = 0$, atunci $a = b = 0$ și $(x, y) \in B \setminus A$. Astfel $B \setminus A$ conține doar elementul $(1, 1)$ **2p**

Altă soluție. Se știe că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Reiese $x^3 + y^3 + 1 - 3xy = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y)$ **4p**

Astfel, dacă $(x, y) \in A$, atunci $(x, y) \in B$ **1p**

Apoi, dacă $(x, y) \in B \setminus A$, atunci $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 0$ și finalizăm ca la prima soluție **2p**

Problema 2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $x^2 + y^2 + xy(x - y) = 17$.

Gazeta Matematică

Soluție. Ecuația se scrie $(x - y)^2 + 2xy + xy(x - y) = 17$ **2p**

Notăm $x - y = d \in \mathbb{Z}$, $xy = p \in \mathbb{N}$. Atunci egalitatea devine $p(d + 2) = 17 - d^2$, de unde

$$p = \frac{17 - d^2}{d + 2} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Obținem $p = \frac{13}{d + 2} + 2 - d \in \mathbb{N}$. Rezultă $d + 2 \in \{1, -1, 13, -13\}$, adică $d \in \{-1, -3, 11, -15\}$.

Dacă $d = -1$, atunci $p = 16$, caz în care nu avem soluții, deoarece nu există două numere naturale cu produsul 16 și diferența -1 . Din $d = -3$ rezultă $p = -8 < 0$, care nu convine. Pentru $d = 11$, $p = -8 < 0$, nu convine. Dacă $d = x - y = -15$, atunci $p = xy = 16$, de unde obținem soluția (unică) $x = 1$, $y = 16$ **3p**

Altă soluție. Ecuația se scrie $(x - y)^2 + 2xy + xy(x - y) = 17$ **2p**
 Formăm o diferență de pătrate: $4(x - y)^2 + 4xy(x - y) + (xy)^2 - (xy)^2 + 8xy - 16 = 68 - 16$,
 adică $(2(x - y) + xy)^2 - (xy - 4)^2 = 52$. Reiese $(2x - 2y + xy - xy + 4)(2x - 2y + xy + xy - 4) = 52$,
 de unde $(x - y + 2)(x - y + xy - 2) = 13$ **2p**

- Cum numerele x, y, z sunt naturale, sunt posibile cazurile
- $x - y + 2 = -13$ și $x - y + xy - 2 = -1$, deci $x - y = -15$, iar $xy = 16$, de unde $y = x + 15$ și $x(x + 15) = 16$. Cum x este natural, deducem că $x = 1$, apoi $y = 16$;
 - $x - y + 2 = -1$ și $x - y + xy - 2 = -13$, deci $x - y = -3$, iar $xy = -8$, imposibil dacă x și y sunt naturale;
 - $x - y + 2 = 1$ și $x - y + xy - 2 = 13$, deci $x - y = -1$ și $xy = 16$, imposibil dacă x și y sunt naturale;
 - $x - y + 2 = 13$ și $x - y + xy - 2 = 1$, deci $x - y = 11$, iar $xy = -8$, imposibil dacă x și y sunt naturale **3p**

Problema 3. Numerele reale strict pozitive x, y, z verifică relațiile $xy + 4 \leq 2(x + z)$, $yz + 4 \leq 2(y + x)$, $zx + 4 \leq 2(z + y)$. Demonstrați că $x = y = z$.

Soluție. Ipoteza este $x(y - 2) \leq 2(z - 2)$, $y(z - 2) \leq 2(x - 2)$, $z(x - 2) \leq 2(y - 2)$ **2p**
 Dacă $x - 2 < 0$, folosind relația a doua rezultă $z - 2 < 0$, apoi din prima obținem $y - 2 < 0$, deci $x, y, z \in (0, 2)$ și $xyz < 8$. Avem $x(2 - y) \geq 2(2 - z) > 0$, $y(2 - z) \geq 2(2 - x) > 0$, $z(2 - x) \geq 2(2 - y) > 0$. Înmulțind inegalitățile membru cu membru și împărțind la $(2 - x)(2 - y)(2 - z) > 0$, rezultă $xyz \geq 8$, contradicție cu $xyz < 8$ **2p**
 Analog obținem că dacă $x > 2$, atunci $y > 2$ și $z > 2$, deci $xyz > 8$. Înmulțind relațiile ajungem apoi la $xyz \leq 8$ - contradicție **2p**
 Așadar $x = 2$. Înlocuind în condițiile date obținem $y \leq z \leq 2 \leq y$, deci $x = y = z = 2$... **1p**

Altă soluție. Avem $ab + 4 - 2(a + b) = (a - 2)(b - 2)$, (1) **2p**
 Presupunem că unul dintre numere este mai mic decât 2, de exemplu $x < 2$. Atunci $yz + 4 \leq 2(y + x) < 2y + 4$, deci $z < 2$. Reiese $xy + 4 \leq 2(x + z) < 2x + 4$, deci $y < 2$. Din (1) obținem $xy + 4 > 2(x + y)$ și analogele, deci $\sum xy + 12 > 4 \sum x$, în contradicție cu ipoteza **3p**
 Așadar $x, y, z \geq 2$. Din (1) reiese $xy + 4 \geq 2(x + y)$ și analogele. Prin adunare obținem $\sum xy + 12 \geq 4 \sum x$. Coroborând aceasta cu ipoteza deducem că toate inegalitățile trebuie să fie egalități, deci $x = y = z = 2$ **2p**

Problema 4. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub. Pe segmentele BC și DD' luăm punctele M , respectiv N , astfel încât $BM = DN$. Arătați că dreapta $A'M$ este perpendiculară pe planul $(AB'N)$.

Soluție. Din $BC \perp (ABB')$ și $AB' \subset (ABB')$ obținem $AB' \perp BC$. Cum $AB' \perp A'B$ (diagonale ale pătratului $ABB'A'$), reiese $AB' \perp (A'BC)$. Deoarece $A'M \subset (A'BC)$, obținem $A'M \perp AB'$, (1) **3p**

Fie $E \in (AD)$ astfel ca $AE = BM$. Atunci $ABME$ este dreptunghi, deci $AB \parallel ME$. Cum $AB \perp (ADA')$ și $AN \subset (ADA')$, rezultă $AN \perp ME$, (2) **2p**

Din $\triangle A'AE \cong \triangle ADN$ (C.C.) obținem $\sphericalangle DAN = \sphericalangle AA'E$, de unde $\sphericalangle AA'E + \sphericalangle A'AN = \sphericalangle DAN + \sphericalangle A'AN = 90^\circ$. Astfel, $AN \perp A'E$. Folosind (2) obținem $AN \perp (A'EM)$, de unde $AN \perp A'M$. Aceasta, împreună cu (1), duce la $A'M \perp (AB'N)$ **2p**

