Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie 2017

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. probleme	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	a)Ridicând la cub, obţinem: $x^3 = 6\cdot\sqrt{3} - 10 - 6\sqrt{3} - 10 - 3\cdot\sqrt[3]{8}\cdot x \Leftrightarrow x^3 = -20 - 6\cdot x \Leftrightarrow$ $x^3 + 20 + 6\cdot x = 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 10\right) = 0 \Rightarrow x = -2;$ soluţie unică.	**2p** **2p**
	$b)$ Trecem logaritmii din problemă în baza 10 şi aplicăm inegalitatea mediilor, obţinem: $\frac{\lg 2}{\lg 3} + \frac{\lg 3}{\lg 5} + \frac{\lg 5}{\lg 2} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\lg 2}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 2}} = 3.$ Observaţie: lg2>0;lg3>0;lg5>0.	1p 2p
2.	$\div\ a^2, b^2, c^2 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2};$ Din teorema cosinusului $\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\measuredangle B) \Leftrightarrow$ $\frac{a^2 + c^2}{2} = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\measuredangle B) \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 4\cdot a\cdot c\cdot\cos(\measuredangle B) \Leftrightarrow$ $2\cdot a\cdot c\cdot(2\cdot\cos(\measuredangle B) - 1) = (a-c)^2 \Rightarrow 2\cdot\cos(\measuredangle B) - 1 \geq 0 \Rightarrow$ $\cos(\measuredangle B) \geq \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3};$ Funcţia cosinus este strict descrescătoare pe $(0,\pi) \Rightarrow m(\measuredangle B) \leq \frac{\pi}{3}.$	**2p** **1p** **2p** **2p**

3.	Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(0,\infty)-\{1\}$. Se observă că x=2 este soluţie sau $\lg^2 x-2\cdot\lg x-3=0\Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{10},1000\right\}$. Aşadar, $x\in\left\{2,\frac{1}{10},1000\right\}$.	**2p** **1p** **3p** **1p**
4.	**Metoda1.** $z_1=\cos\frac{\pi}{11}+i\cdot\sin\frac{\pi}{11}$ $z_2=\cos\frac{4\cdot\pi}{11}+i\cdot\sin\frac{4\cdot\pi}{11}$ $z_3=\cos\frac{7\cdot\pi}{11}+i\cdot\sin\frac{7\cdot\pi}{11}$ $z_4=\cos\frac{10\cdot\pi}{11}+i\cdot\sin\frac{10\cdot\pi}{11}$; Observăm că $z_1\cdot z_4=z_2\cdot z_3=-1,\ z_1\cdot z_4\cdot z_2\cdot z_3=1$; Amplificăm a doua fracţie cu z_1, a treia fracţie cu $z_1\cdot z_2$, iar a patra fracţie cu $z_1\cdot z_2\cdot z_3$, obţinem: $2\cdot z^2=\frac{\lvert z\rvert+z_1}{1+z_1+z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2\cdot z_3}+\frac{\lvert z\rvert\cdot z_1+z_1\cdot z_2}{z_1+z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2\cdot z_3+1}+$ $+\frac{\lvert z\rvert\cdot z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2\cdot z_3}{z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2\cdot z_3+1+z_1}+\frac{\lvert z\rvert\cdot z_1\cdot z_2\cdot z_3+1}{z_1\cdot z_2\cdot z_3+1+z_1+z_1\cdot z_2}\Leftrightarrow$ $2\cdot z^2=\frac{\lvert z\rvert\cdot(1+z_1+z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2\cdot z_3)+(1+z_1+z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2\cdot z_3)}{1+z_1+z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2\cdot z_3}\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}2\cdot z^2=\lvert z\rvert+1\\ \text{Fie } z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot\left(x^2-y^2+2xyi\right)=\sqrt{x^2+y^2}+1\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $x=0$ sau y=0. I. $x=0\Rightarrow -2y^2=\lvert y\rvert+1-$ nu are soluţii în $\mathbb{R}$. II. $y=0\Rightarrow 2x^2=\lvert x\rvert+1\Rightarrow 2\cdot x^2-\lvert x\rvert-1=0\Rightarrow\lvert x\rvert=1\ \Rightarrow x=\pm1$ sau $\lvert x\rvert=-\frac{1}{2}$(nu convine) Aşadar, $x=\pm1,\ y=0\Rightarrow z\in\{\pm1\}$.	**3p** **2p** **2p**

Metoda 2.

Fie $z_1=\varepsilon,\ \varepsilon^{11}=-1\ \Rightarrow z_2=\varepsilon^4, z_3=\varepsilon^7, z_4=\varepsilon^{10}$.

Membrul drept al egalităţii devine:

$$M_d=\frac{|z|+\varepsilon}{1+\varepsilon+\varepsilon^5-\varepsilon}+\frac{|z|+\varepsilon^4}{1+\varepsilon^4-1-\varepsilon^{10}}+\frac{|z|+\varepsilon^7}{1+\varepsilon^7-\varepsilon^6-\varepsilon^7}+\frac{|z|+\varepsilon^{10}}{1+\varepsilon^{10}-1-\varepsilon^4}=|z|\cdot A+B;$$

$$A=\frac{1}{1+\varepsilon^5}+\frac{1}{\varepsilon^4+\frac{1}{\varepsilon}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon^5}}+\frac{1}{-\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon^4}=1;$$

$$B=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^5}+\frac{\varepsilon^5}{1+\varepsilon^5}+\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon^5}+\frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon^4}=1;$$

Aşadar, $M_d=|z|+1$;

*E*cuaţia devine $2\cdot z^2=|z|+1$ -rezolvare dată mai sus.