Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie 2017

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$a)\ \left\{\sqrt{4\cdot n^2+n+1}\right\}=\sqrt{4\cdot n^2+n+1}-\left[\sqrt{4\cdot n^2+n+1}\right];$	
	$2n<\sqrt{4\cdot n^2+n+1}<2n+1,(\forall)n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$	**1p**
	$\left[\sqrt{4\cdot n^2+n+1}\right]=2n;$	
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{4\cdot n^2+n+1}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4\cdot n^2+n+1}-2n\right)=$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\cdot n^2+n+1-4n^2}{\sqrt{4\cdot n^2+n+1}+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\right)}=\frac{1}{4}.$	**1p**
	$b)\left(8+3\cdot\sqrt{7}\right)^n=\mathrm{a}_n+\mathrm{b}_n\cdot\sqrt{7}\Rightarrow\left(8-3\cdot\sqrt{7}\right)^n=a_n-b_n\cdot\sqrt{7};$	**1p**
	Asadar, $a_n=\frac{\left(8+3\cdot\sqrt{7}\right)^n+\left(8-3\cdot\sqrt{7}\right)^n}{2},\ b_n=\frac{\left(8+3\cdot\sqrt{7}\right)^n-\left(8-3\cdot\sqrt{7}\right)^n}{2\cdot\sqrt{7}};$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{7}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(8+3\cdot\sqrt{7}\right)^n+\left(8-3\cdot\sqrt{7}\right)^n}{\left(8+3\cdot\sqrt{7}\right)^n-\left(8-3\cdot\sqrt{7}\right)^n}=$	
	$\sqrt{7}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{8-3\cdot\sqrt{7}}{8+3\cdot\sqrt{7}}\right)^n}{1-\left(\frac{8-3\cdot\sqrt{7}}{8+3\cdot\sqrt{7}}\right)^n}=\sqrt{7};$	**2p**
	$0<\frac{8-3\cdot\sqrt{7}}{8+3\cdot\sqrt{7}}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8-3\cdot\sqrt{7}}{8+3\cdot\sqrt{7}}\right)^n=0.$	

2.	a)Din ipoteză rezultă că $x_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, iar din relaţiile $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} = \ln x_n$ şi $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \ln x_{n+1} \Rightarrow$ $x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$ Deci $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător. Presupunând că (x_n) ar fi mărginit superior, din teorema lui Weierstrass ar rezulta că există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $l > 0$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă $x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow$ $l = 0$ (contradicţie cu l>0). Aşadar, (x_n) este nemărginit superior şi există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.	1p 1p 1p 1p
	b)Din $x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(e^{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e.$	**1p** **2p**
3.	Se obţine $(\det X)^3 = -1$ şi din $\det X \in \mathbb{Z} \Rightarrow \det X = -1.$ Din ecuaţia lui Cayley – Hamilton $\Rightarrow X^2 - t \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$, unde $t = TrX \in \mathbb{Z}$, $\det X = -1$ Obţinem $X^2 = t \cdot X + I_2 \Rightarrow X^3 = t \cdot X^2 + X \Rightarrow$ $X^3 = t \cdot (t \cdot X + I_2) + X \Rightarrow X^3 = (t^2 + 1) \cdot X + t \cdot I_2;$	**1p** **1p** **1p**

	. Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})\Rightarrow$ $(t^2+1)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow$ $\begin{cases} (t^2+1)\cdot \text{a+t=7} \\ (t^2+1)\cdot b=10 \\ (t^2+1)\cdot c=-2 \\ (t^2+1)\cdot d+t=-3 \end{cases}$ Din $(t^2+1)\cdot c=-2\Rightarrow t^2+1/2\Rightarrow t^2+1\in\{1,2\}\Rightarrow t\in\{0,-1,\ 1\}$.	**2p**
	Pentru t=0$\Rightarrow \text{X}^2=I_2\Rightarrow \text{X}^3=X\ =\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ nu verifică ecuaţia; Pentru t=1$\Rightarrow$ X=$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ verifică ecuaţia; Pentru t=$-1\Rightarrow$ X=$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ nu verifică ecuaţia. Aşadar, soluţia este X=$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.	**2p**

4.	Deoarece rang A=1$\Rightarrow$ oricare două linii ale matricei A sunt proporţionale $\Rightarrow$ există numerele $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, c_1, c_2, c_3, ..., c_n \in C$, astfel încât A=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3. & .. & c_n \end{pmatrix}$, adică $a_{ij} = b_i \cdot c_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n;$ $A^2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3. & .. & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3. & .. & c_n \end{pmatrix};$ Dar$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3. & .. & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + ... + b_n \cdot c_n = TrA;$ Deci, $A^2 = (TrA) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3. & .. & c_n \end{pmatrix} = TrA \cdot A.$	**2p**
	b) Dacă n=2, A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, atunci $A + A^* = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (a+d) \cdot I_2.$	**2p**

	Reciproc: Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A \neq O_n$, detA=0 cu $A+A^* = (TrA)\cdot I_n$. Înmulţim la dreapta cu A^* şi ţinând cont de relaţia $A \cdot A^* = \det A \cdot I_n = O_n$, rezultă că $\left(A^*\right)^2 = (TrA)\cdot A^*$. Dacă $A^* = O_n$, din ipoteză ar rezulta că A=$(TrA)\cdot I_n$ şi calculând determinantul, ar rezulta că detA=$(TrA)^n$ =0, deci $TrA = 0$, $deci A = O_n$, contradicţie. Deci $A^* \neq O_n$ şi atunci rangA=n-1. Dar $A \cdot A^* = O_n$, din inegalitatea lui Sylvester va rezulta că 0=rang$\left(A \cdot A^*\right) \geq$ rangA+rang$A^* - n$, de unde rezultă că rang$A^* \leq n - rangA = 1$. Deoarece $A^* \neq O_n$, va rezulta că rang$A^* = 1$. Conform punctului a), rezultă că $\left(A^*\right)^2 = \left(TrA^*\right)\cdot A^*$. Dar din relaţia $\left(A^*\right)^2 = (TrA)\cdot A^*$, va rezulta că $\left(TrA - TrA^*\right)\cdot A^* = O_n$ şi deoarece $A^* \neq O_n$, rezultă că TrA=TrA^*. În relaţia din ipoteză $A+A^*=(TrA)\cdot I_n$, aplicăm urma matricei şi rezultă că $TrA + TrA^* = n \cdot TrA \Rightarrow$ $2 \cdot TrA = n \cdot TrA$, Dacă $TrA = 0 \Rightarrow A+A^* = O_n \Rightarrow A = -A^* \Rightarrow rangA$=rang$\left(-A^*\right) = rang A^* \Rightarrow$ $n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$; Dacă $TrA \neq 0 \Rightarrow n = 2$.	 **1p** **1p** **1p**