Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie 2017

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) Se verifică dacă legea este bine definită; Se verifică axiomele grupului. Elementul neutru este e=0 $\in(-1,1)$. Elemente simetrizabile: $(\forall)x\in(-1,1)\Rightarrow x'=-x\in(-1,1)$.	**1p** **1p** **1p**
	$b)\ f(x)=1-\frac{2}{e^{2\cdot x}+1},\forall x\in\mathbb{R}$ Fie $x, y\in\mathbb{R}$. $f(x+y)=1-\frac{2}{e^{2\cdot x+2\cdot y}+1}$; $f(x)*f(y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}=\frac{1-\frac{2}{e^{2\cdot x}+1}+1-\frac{2}{e^{2\cdot y}+1}}{1+\left(1-\frac{2}{e^{2\cdot x}+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{e^{2\cdot y}+1}\right)}=$ $1-\frac{2}{e^{2\cdot x+2\cdot y}+1}$; $\Rightarrow f$ este morfism de grupuri. f este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă (1) $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1;\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1\\ \text{f este continuă pe }\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f$ este surjectivă (2) Din (1)şi$(2)\Rightarrow f$ este bijectivă. $\left.\begin{matrix}f\text{ este morfism de grupuri}\\ f\text{ este bijectivă}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f$ este izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{R},+)$ la $(A,*)$.	 **1p** **1p**

	$c)$ Fie $m \in A$. $x * x = m \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = m \Leftrightarrow mx^2 - 2x + m = 0;$ $\Delta = 4 - 4m^2 > 0$ pentru $(\forall) m \in A \Rightarrow$ ecuaţia are două soluţii reale diferite. $x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$. Dacă $x_1 \in (-1,1) \Rightarrow x_2 \notin (-1,1)$. Dacă $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -1,$ nu convine; Dacă $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1,$ nu convine; Dacă $x_1 \in \mathbb{R}\text{-}[-1,1] \Rightarrow x_2 \in (-1,1)$. În concluzie, ecuaţia are o singură soluţie în A.	**1p** 1p
2.	$3 \cdot x \cdot F(x) + x^2 \cdot f(x) = arcctgx \,/ \cdot x \Rightarrow$ $3 \cdot x^2 \cdot F(x) + x^3 \cdot f(x) = x \cdot arcctgx \Rightarrow$ $\left(x^3 \cdot F(x)\right)' = x \cdot arcctgx \Rightarrow$ $x^3 \cdot F(x) \in \int x \cdot arcctgx\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot arcctgx\, dx =$ $\frac{x^2}{2} \cdot arcctgx + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot arcctgx + \frac{1}{2} \cdot \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$ $\frac{x^2}{2} \cdot arcctgx + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot arcctgx + C$ $F(x) = \frac{1}{2x} \cdot arcctgx + \frac{1}{2 \cdot x^2} + \frac{1}{2 \cdot x^3} \cdot arcctgx + \frac{C}{x^3}$. Atunci, $f(x) = F'(x) =$ $\left(-\frac{1}{2 \cdot x^2} - \frac{3}{2 \cdot x^4}\right) \cdot arcctgx - \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2 \cdot x^3}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^3} - \frac{3 \cdot C}{x^4}$. $f(1) = -2 \cdot arcctg1 - \frac{1}{2} - 1 - 3 \cdot C = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} - 3 \cdot C = 0 \Rightarrow$ $C = -\frac{\pi + 3}{6} \Rightarrow$ $f(x) = \left(-\frac{1}{2 \cdot x^2} - \frac{3}{2 \cdot x^4}\right) \cdot arcctgx - \frac{3}{2 \cdot x^3} + \frac{\pi + 3}{2 \cdot x^4}$.	**2p** 2p 2p 1p

3.	a) $e^{x-F(x)}=F(x)/' \Rightarrow e^{x-F(x)}\cdot(1-f(x))=f(x)/\cdot(1-f(x))\Rightarrow$ $e^{x-F(x)}\cdot(1-f(x))^2=f(x)\cdot(1-f(x))\geq 0,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $f(x)\in[0,1],(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$	**1p** **2p**
	b) Se observă că $f_n'(x)=f_{n-1}(x),(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 2.$ Deci $f_n-f_n'=f_n-f_{n-1}\Rightarrow(f_n-f_n')(x)=\frac{x^n}{n!},(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 1.$ $\int\frac{x^n\cdot e^x}{f_n^2(x)+e^{2\cdot x}}\,dx=n!\cdot\int\frac{(f_n(x)-f_n'(x))(e^x)}{f_n^2(x)+e^{2\cdot x}}dx=$ $n!\cdot\int\left(\frac{f_n(x)\cdot e^x-f_n'(x)\cdot e^x}{f_n^2(x)}\cdot\frac{f_n^2(x)}{f_n^2(x)+e^{2\cdot x}}\right)dx=$ $n!\cdot\int\left(\frac{e^x}{f_n(x)}\right)'\cdot\frac{1}{1+\frac{e^{2\cdot x}}{f_n^2(x)}}\,dx=n!\cdot arctg\,\frac{e^x}{f_n(x)}+C$ *Obs*. Pentru $x>0\Rightarrow f_n(x)>0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*.$	**1p** **1p** **2p**
4.	a) Fie $a\in G\text{ - }H,\ a\neq$ e. $\left.\begin{array}{l}a\cdot a=a\cdot a\Rightarrow a\in C(a)\\ a\cdot e=e\cdot a\Rightarrow e\in C(a)\end{array}\right\}\Rightarrow C(a)=\{e,a\}.$ Dar $a^2\cdot a=a\cdot a^2\Rightarrow a^2\in C(a)$ şi $a^2\neq a\Rightarrow a^2=e.$	**2p**
	b) Fie $a,b\in G\text{ - }H;$ Dacă $a=b\Rightarrow a\cdot b=a^2=e\in H;$ Dacă $a\neq b\Rightarrow a^2\cdot b^2=e=(a\cdot b)^2=abab\Rightarrow ab=ba\Rightarrow b\in C(a)$ Dar b $\neq$ e $\Rightarrow$ b=a $(fals)$. Deci a $\cdot$ b $\in H,(\forall)a,b\in G-H.$	**2p**

	c) Atunci funcţia $f: G - H \to H,\ f(x) = a \cdot x,\ a \in G - H,\ a$ fixat, este bine definită şi injectivă $\Rightarrow \lvert G - H \rvert \le \lvert H \rvert \Rightarrow \lvert G \rvert \le 2 \cdot \lvert H \rvert \Rightarrow$ G este grup finit. Dar $\lvert H \rvert$ divide $\lvert G \rvert \Rightarrow \lvert G \rvert = \lvert H \rvert \cdot k,\ k \in \mathbb{N}^*$; Va rezulta că $k \cdot \lvert H \rvert \le 2 \cdot \lvert H \rvert \Rightarrow k \le 2$ $H \ne G \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \lvert G \rvert = 2 \cdot \lvert H \rvert$. Dacă $\lvert H \rvert$ se divide cu $2 \Rightarrow (\exists) h \in H - \{e\}$, astfel încât $h^2 = e$. Pentru $a \in G - H \Rightarrow a \cdot h \in G - H$ şi $a^2 \cdot h^2 = e = a \cdot h \cdot a \cdot h \Rightarrow$ $ah = ha \Rightarrow h \in C(a) \Rightarrow h = a$ (fals) Deci $\lvert H \rvert = 2n + 1 \Rightarrow \lvert G \rvert = 4n + 2,\ n \in \mathbb{N}^*$.	**3p**