Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie-2017

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Puncta**
1.	a) Presupunem prin reducere la absurd că există $q \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $n+1=n \cdot q^a$, $a \in \mathbb{N}^*$ şi $n+2=n \cdot q^b, b \in \mathbb{N}^*, a \neq b$. Ridicând prima relaţie la puterea b şi a doua relaţie la puterea a, obţinem: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^b = q^{a\cdot b}$ şi $\left(\frac{n+2}{n}\right)^a = q^{a\cdot b} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^b = \left(\frac{n+2}{n}\right)^a$. Dacă a<b atunci $(n+1)^b = n^{b-a} \cdot (n+2)^a \Rightarrow$ n+2/n+1 (fals). Dacă a>b atunci $(n+1)^b \cdot n^{a-b} = (n+2)^a \Rightarrow$ n+1/n+2 $\Rightarrow$ n+1/1 $\Rightarrow$ n=0 (fals)	**1p** **1p** **1p**
	b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia 1,5,9,13,... $\Rightarrow a_1 = 1; r = 4;$ $a_n = 1 + 4 \cdot (n-1) = 4n - 3;$ Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia 4,15,26,37,.... $\Rightarrow b_1=4$, r=11, $b_n = 4 + 11 \cdot (n-1) = 11 \cdot n - 7;$ Determinăm $m,n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n = b_m \Leftrightarrow 4n-3 = 11 \cdot m - 7 \Leftrightarrow$ $4 \cdot (n+1) = 11 \cdot m \Rightarrow 4/m \Rightarrow m = 4 \cdot k, k \in \mathbb{N}^*$ şi $n+1 = 11 \cdot k \Rightarrow$ $n = 11 \cdot k - 1, k \in \mathbb{N}^*$. Temenii comuni sunt: $a_{11\cdot k-1} = b_{4\cdot k} = 44 \cdot k - 7$. Deci, şirul $c_k = 44 \cdot k - 7, k \in \mathbb{N}^*$ formează o progresie aritmetică pentru că $c_{k+1} - c_k = 44$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$, $r = 44$.	**1p** **1p** **1p** 1p

2.	$a)\ 0 \le \frac{2\cdot\vert a\vert}{1+4\cdot a^2} \le \frac{1}{2},\ (\forall) a \in \mathbb{R}.$ $\left.\begin{array}{l}\vert a\vert \ge 0, (\forall) a \in \mathbb{R}\\ 1+4\cdot a^2 > 0, (\forall) a \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\cdot\vert a\vert}{1+4\cdot a^2} \ge 0\ (A), (\forall) a \in \mathbb{R}$ $\frac{2\cdot\vert a\vert}{1+4\cdot a^2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cdot\vert a\vert \ge 1+4\cdot a^2 \Leftrightarrow$ $(2\cdot\vert a\vert-1)^2 \ge 0\ (A), (\forall) a \in \mathbb{R}.$	**1p** **1p**
	b)Notăm a= $\vert x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\vert$, b=$\frac{2\cdot\vert y\vert}{1+4\cdot y^2}$; Ecuaţia devine: $[a]+3\cdot\{b\}=2,5 \Leftrightarrow [a]=2,5-3\cdot\{b\}$; Dar $0 \le \{b\} \le \frac{1}{2},\ (\forall) b \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{3}{2} \le -3\cdot\{b\} \le 0 \Rightarrow$ $1 \le 2,5-3\cdot\{b\} \le 2,5 \Rightarrow$ $1 \le [a] \le 2,5 \Rightarrow [a] \in \{1,2\}.$	**2p**
	$i) [a]=1 \Rightarrow \{b\}=\frac{1}{2};$ $\begin{cases}[a]=1\\ \{b\}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\vert x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\vert\right]=1\\ \left\{\frac{2\cdot\vert y\vert}{1+4\cdot y^2}\right\}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 \le \vert x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\vert < 2\\ y \in \left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6} \in (-2,-1] \cup [1,2)\\ y \in \left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases}x \in \left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}, \sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\\ y \in \left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\end{cases}.$	**2p**

	$ii)\left[a\right]=2\Rightarrow\left\{b\right\}=\dfrac{1}{6}$ $\begin{cases}\left[a\right]=2\\ \left\{b\right\}=\dfrac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\left\|x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right\|\right]=2\\ \left\{\dfrac{2\cdot\|y\|}{1+4\cdot y^2}\right\}=\dfrac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\in(-3,-2]\cup[2,3)\\ y\in\left\{\pm\dfrac{3\pm2\sqrt{2}}{2}\right\}\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}x\in\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3},-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2}-\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right)\\ y\in\left\{\pm\dfrac{3\pm2\sqrt{2}}{2}\right\}\end{cases}.$	**1p**
3.	**Metoda 1.** $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NT}\\ \overrightarrow{ST}=\overrightarrow{SQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PT}\end{array}\right\}\Rightarrow$ $2\cdot\overrightarrow{ST}=\left(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SQ}\right)+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}+\left(\overrightarrow{NT}+\overrightarrow{PT}\right)\Rightarrow$ $2\cdot\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP};$ Fie paralelogramul $NMQI$; Fie J mijlocul segmentului (PI); $2\cdot\overrightarrow{QJ}=\overrightarrow{QI}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=2\cdot\overrightarrow{ST}\Rightarrow\overrightarrow{QJ}=\overrightarrow{ST};$ $\left.\begin{array}{l}\text{Dar }\triangle QIP\text{ este isoscel}\Rightarrow QJ\perp PI\\ \overrightarrow{QJ}=\overrightarrow{ST}\\ ST\perp PN\end{array}\right\}\Rightarrow I\in NP\Rightarrow MQ\parallel NP\Rightarrow$ $MQPN$ este trapez isoscel $\Rightarrow MQPN$ patrulater inscriptibil.	**2p** **1p** **1p** **1p** **2p**

Metoda 2.

Fie MN $\cap$ PQ=$\{O\}$. $MS = SQ \Rightarrow \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}\right)$

$NT = NP \Rightarrow \overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right)$

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}\right)$;

Fie MN=PQ=x. Atunci $\overrightarrow{MN} = \frac{MN}{ON} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{x}{ON} \cdot \overrightarrow{ON}$ şi

$\overrightarrow{QP} = \frac{QP}{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{x}{OP} \cdot \overrightarrow{OP}$.

Obţinem $\overrightarrow{ST} = \frac{x}{2 \cdot OP \cdot ON} \cdot \left(OP \cdot \overrightarrow{ON} + ON \cdot \overrightarrow{OP}\right) \quad (1)$

Fie $[OL$ bisectoarea $\measuredangle NOP$, L $\in (NP)$.

Din teorema bisectoarei rezultă că $\frac{NL}{LP} = \frac{ON}{OP}$ şi

$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{\frac{ON}{OP} + 1} \cdot \overrightarrow{ON} + \frac{\frac{ON}{OP}}{\frac{ON}{OP} + 1} \cdot \overrightarrow{OP}$ sau

$\overrightarrow{OL} = \frac{OP}{ON + OP} \cdot \overrightarrow{ON} + \frac{ON}{ON + OP} \cdot \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow$

$(ON + OP)\overrightarrow{OL} = OP \cdot \overrightarrow{ON} + ON \cdot \overrightarrow{OP} \quad (2)$

Din relaţiile 1 şi 2, obţinem că $\overrightarrow{ST} = \frac{x \cdot (ON + OP)}{2 \cdot OP \cdot ON} \cdot \overrightarrow{OL} \Rightarrow$

vectorii $\overrightarrow{OL}$ şi $\overrightarrow{ST}$ sunt coliniari.

Dar ST $\perp$ NP $\Rightarrow$ OL $\perp NP \Rightarrow$ OL este bisectoare şi înălţime în triunghiul $\triangle ONP \Rightarrow \triangle ONP$ este isoscel.

Dar $MN = QP$ şi ON=OP $\Rightarrow$ OM=OQ şi conform teoremei lui Thales MQ || NP, deci MNPQ este trapez isoscel $\Rightarrow$ $MNPQ$ patrulater inscriptibil.

4.	Soluţie: Se ştie că mulţimea numerelor prime este infinită şi notăm p_k al k-lea număr prim din şirul numerelor naturale, (de exemplu: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots p_7 = 17, \dots$). Un termen al şirului x_n are descompunerea în factori primi de forma $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Orice divizor al său este de forma $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, unde $0 \le \beta_i \le \alpha_i, (\forall) i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Deci, numărul divizorilor naturali este egal cu numărul k-uplurilor de forma $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k)$. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$, avem că $\beta_i \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha_i\} \Rightarrow$ β_i ia valori în $1+\alpha_i$ moduri. Conform regulii produsului, se obţine că numărul k-uplurilor $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k)$ este $(1+\alpha_1) \cdot (1+\alpha_2) \cdot (1+\alpha_3) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_k)$ şi egal cu numărul divizorilor unui număr de forma $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Cum orice termen x_n are exact 17 divizori, din egalitatea $(1+\alpha_1) \cdot (1+\alpha_2) \cdot (1+\alpha_3) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_k) = 17$ obţinem că există un $1+\alpha_j = 17 \Rightarrow \alpha_j = 16,\ j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ şi restul $1+\alpha_i = 1,\ (\forall) i \ne j$, sau $\alpha_i = 0, i \ne j$, deci $x_j = p_j^{16}$.	2p
	În general, $x_n = p_n^{16}$ (Obs. $x_7 = 17^{16}$). Fie mulţimea $A = \{p_{n_1}^{16}, p_{n_2}^{16}, p_{n_3}^{16}, \dots, p_{n_{17}}^{16}\}$, cu $n_i \in \mathbb{N}^*, n_1 < n_2 < \dots < n_{17}$. Pentru că 17 este număr prim, conform teoremei lui Fermat, rezultă că $17 / p_{n_i}^{17} - p_{n_i}, (\forall) i \in \{1, 2, 3, \dots, 17\}$ sau $17 / p_{n_i} \cdot (p_{n_i}^{16} - 1)$.	1p

	Implicaţia directă: Ştim că S=$\sum_{i=1}^{17} \mathrm{p}_{n_i}^{16}$ nu este divizibilă cu 17 şi presupunem prin absurd că $x_7 \notin A$. Urmează că bazele $\mathrm{p}_{n_i} \neq 17, (\forall) i \in \{1, 2, 3, ..., 17\}$ şi fiind numere prime nu sunt divizibile cu 17. Rămâne că $17 / \left(\mathrm{p}_{n_i}^{16} - 1\right), (\forall) i \in \{1, 2, 3, ..., 17\}$ şi aceasta arată că S este suma a 17 numere de forma $M_{17} + 1$, deci divizibilă cu 17, fals. Presupunerea este falsă, $x_7 \in A$.	**2p**
	Reciproc: Dacă $x_7 \in$ A, $x_7 = 17^{16}$, atunci suma S conţine un multiplu de 17 şi restul celor 16 termeni din sumă sunt, conform teoremei lui Fermat, $M_{17} + 1$ (pentru că bazele p_{n_i}, cu $\mathrm{n}_i \neq 7$, sunt numere prime diferite de Deci, S=$M_{17} + 16$ nedivizibilă cu 17.	**2p**