# Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

**19 februarie 2017**

**Clasa a V-a**

**Barem de evaluare**

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

| **Nr. problemei** | **Soluţie, rezolvare** | **Punctaj** |
|---|---|---|
| **1.** | $137 : \hat{\imath} = c,$ rest r, $0 \le r < \hat{\imath}$<br>137= $\hat{\imath} \cdot$ c+r;<br>$c = \hat{\imath} : 2,\ r \in \{0,1,2,...,9\};$<br>$\left.\begin{array}{l}\hat{\imath} = 2\cdot c \Rightarrow 137 = 2\cdot c^2 + r\\ 137 = \text{ număr impar}\\ 2\cdot c^2 = \text{număr par}\end{array}\right\} \Rightarrow r = \text{număr impar} \Rightarrow r \in \{1,3,5,7,9\}$<br>$137 - r = 2\cdot c^2 \Rightarrow c^2 = (137-r) : 2 \Rightarrow c^2 \ge (137-9) : 2$ şi $c^2 \le (137-1) : 2 \Rightarrow$<br>$64 \le c^2 \le 68 \Rightarrow c = 8, \hat{\imath} = 16, r = 9 \Rightarrow 137 = 16\cdot 8 + 9.$ | **2p**<br><br>**2p**<br><br>**2p**<br>**1p** |
| **2** | a)<br>$u\left(2011^{2018}\right) = 1; u\left(2013^{2016}\right) = 1; u\left(2015^{2014}\right) = 5;$<br>$u\left(2017^{2012}\right) = 1;$<br>$u\left(2011^{2018} + 2013^{2016} + 2015^{2014} + 2017^{2012}\right) = 1+1+5+1 = 8 \Rightarrow$<br>$\left(2011^{2018} + 2013^{2016} + 2015^{2014} + 2017^{2012}\right) \vdots 2.$ | **2p** |
| | *b*)<br>$u\left(2014^{2015} + 2015^{2016} + 2016^{2017}\right) = u\left(u\left(4^{2015}\right)\right) + u\left(u\left(5^{2016}\right)\right) + u\left(u\left(6^{2017}\right)\right) =$<br>$u(4+5+6) = 5 \Rightarrow \left(2014^{2015} + 2015^{2016} + 2016^{2017}\right) \vdots 5.$ | **2p** |
| | *c*)<br>$u\left(2011^{2017} + 2012^{2017} + 2013^{2017} + 2014^{2017} + 2016^{2017} + 2017^{2017} + 2018^{2017} + 2019^{2017}\right) =$<br>$u(1+2+3+4+6+7+8+9) = u(40) = 0 \Rightarrow$ numărul se divide cu 10. | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| 3. | Numărul natural nenul $n$ are un număr impar de divizori $\Rightarrow n$ este pătrat perfect.<br>Fie $n=d_1^{a_1}\cdot d_2^{a_2}\cdot d_3^{a_3}\cdot\ldots\cdot d_k^{a_k}$.<br>$\left.\begin{array}{l}\text{Numărul divizorilor lui } n \text{ este } (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_k)\\ \text{Numărul divizorilor lui } n \text{ este număr impar}\end{array}\right\}\Rightarrow$<br>$1+a_1, 1+a_2, \ldots, 1+a_k$ sunt numere impare $\Rightarrow$<br>$a_1, a_2, \ldots, a_k$ sunt numere pare $\Rightarrow n$ este pătrat perfect. | **2p** |
| | Se demonstrează că 2017 număr prim | **2p** |
| | $\left.\begin{array}{l}2017/n\\ 2017 \text{ număr prim}\end{array}\right\}\Rightarrow n=2017^a\cdot b\Rightarrow a$ este număr par $\Rightarrow$ | **1p** |
| | $\left.\begin{array}{l}2017^2\ / \ n\\ 2017^2=4068289\ (7 \text{ cifre})\end{array}\right\}\Rightarrow n$ are cel puţin 7 cifre $\Rightarrow$<br>nu există numere naturale de 6 cifre care să fie divizibile cu 2017 şi<br>să aibă număr impar de divizori. | **2p** |
| 4. | a) $n=\underbrace{999\ldots99}_{2016 cifre}=10^{2016}-1=10^{2016}-10^0$ | **3p** |
| | *b*) **Metoda 1.**<br>Notăm cu $A=n+36\cdot m+11$.<br>$A=\underbrace{999\ldots99}_{2016 cifre}+36\cdot m+11=M_9+11\Rightarrow A=M_3+2\neq$ pătrat perfect. | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| | *b*)<br>Demonstrăm că un pătrat perfect nu poate fi de forma $M_3+2$.<br>Dacă considerăm un pătrat perfect $\mathrm{u}^2$, atunci:<br>$\mathrm{u}=3\cdot \mathrm{k} \Rightarrow \mathrm{u}^2=9\cdot k^2=M_3$;<br>$\mathrm{u}=3\cdot \mathrm{k}+1 \Rightarrow \mathrm{u}^2=\left(3\cdot \mathrm{k}+1\right)^2=M_3+1$;<br>$\mathrm{u}=3\cdot \mathrm{k}+2 \Rightarrow \mathrm{u}^2=\left(3\cdot \mathrm{k}+2\right)^2=M_3+4=M_3+1$.<br>Așadar, un pătrat perfect are forma $M_3$ sau $M_3+1$.<br>În concluzie, $n+36\cdot m+11$ nu este pătrat perfect.<br>**Metoda 2.**<br>$n=10^{2016}-1;\ m=\underbrace{111...11}_{1008 cifre} \Rightarrow 9\cdot m=\underbrace{999...99}_{1008 cifre}=10^{1008}-1$;<br>$36\cdot m=4\cdot 9\cdot m=4\cdot\left(10^{1008}-1\right)$;<br>$n+36\cdot m+11=10^{2016}-1+4\cdot\left(10^{1008}-1\right)+9+2==\left(10^{1008}+2\right)^2+2>\left(10^{1008}+2\right)^2$.<br>$\left(10^{1008}+3\right)^2=\left(10^{1008}+3\right)\cdot\left(10^{1008}+3\right)=10^{2016}+6\cdot 10^{1008}+9=$<br>$10^{2016}+4\cdot 10^{1008}+6+\left(2\cdot 10^{1008}+3\right)>10^{2016}+4\cdot 10^{1008}+6=$<br>$n+36\cdot m+11$;<br>$\left(10^{1008}+2\right)^2<n+36\cdot m+11<\left(10^{1008}+3\right)^2 \Rightarrow n+36\cdot m+11$ nu este pătrat perfect. | **2p** |