Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie 2017

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1	*a*) $x^{2017}-1=10+10\cdot 11+10\cdot 11^2+10\cdot 11^3+...+10\cdot 11^{2016}$ $x^{2017}-1=10\cdot\left(1+11+11^2+11^3+\ldots+11^{2016}\right)\ (1)$ $S=1+11+11^2+11^3+\ldots+11^{2016}\ /\cdot 11\Rightarrow$ $11\cdot S=11+11^2+11^3+\ldots+11^{2016}+11^{2017}$ Scăzând cele două sume, obţinem: $10\cdot S=11^{2017}-1$; Înlocuind în (1), obţinem: $x^{2017}-1=11^{2017}-1\Leftrightarrow x^{2017}=11^{2017}\Rightarrow x=11\in\mathbb{N},$ soluţia ecuaţiei.	 1p 1p 1p
	b) Metoda 1. Fie $A=11^{2017}-11=11\cdot\left(11^{2016}-1\right)$. $u(A)=0\Rightarrow A\,\vdots\,10.$	 2p

	$11^{2016}=\left(11^{1008}\right)^2=M_3+1;$ $11^{2016}-1=M_3\Rightarrow A\vdots 3;$ $(3,10)=1\Rightarrow A\vdots 30.$ Metoda 2. Deoarece x =11 este soluţia ecuaţiei de la punctul a) $\Rightarrow$ $11^{2017}-1=10+10\cdot 11+10\cdot 11^2+10\cdot 11^3+...+10\cdot 11^{2016}\ /+(-10)\Rightarrow$ $11^{2017}-11=10\cdot 11+10\cdot 11^2+10\cdot 11^3+...+10\cdot 11^{2016}\Leftrightarrow$ $11^{2017}-11=10\cdot\left(11+11^2+11^3+...+11^{2016}\right)\Rightarrow\left(11^{2017}-11\right)\vdots 10;$ Să demonstrăm că $\left(11+11^2+11^3+...+11^{2016}\right)\vdots 3$ $11+11^2+11^3+...+11^{2016}=$ $=11\cdot(1+11)+11^3\cdot(1+11)+11^5\cdot(1+11)+...+11^{2015}\cdot(1+11)=$ $11\cdot 12+11^3\cdot 12+...+11^{2015}\cdot 12=$ $12\cdot\left(11+11^3+11^5+...+11^{2015}\right)\vdots 3$ Dar $(3,10)=1\Rightarrow\left(11^{2017}-1\right)\vdots 30.$	2p
2	a) $13\cdot\mathrm{a}+2\cdot\mathrm{b}-11\cdot\mathrm{c}=0\Leftrightarrow 2\cdot\mathrm{a}+2\cdot\mathrm{b}=11\cdot\mathrm{c}-11\cdot a\Leftrightarrow 2\cdot(a+b)=11\cdot(c-a)\Leftrightarrow$ dar $(2,11)=1\Rightarrow(a+b)\vdots 11\quad(1)$	1p
	$13\cdot\mathrm{a}+2\cdot\mathrm{b}-11\cdot\mathrm{c}=0\Leftrightarrow 13\cdot\mathrm{a}\text{-}13\cdot\mathrm{c}+2\cdot\mathrm{c}+2\cdot\mathrm{b}=0\Leftrightarrow 2\cdot(b+c)=13\cdot(c-a);$ dar $(2,13)=1\Rightarrow(b+c)\vdots 13\quad(2)$ $13\cdot\mathrm{a}+2\cdot\mathrm{b}-11\cdot\mathrm{c}=0\Leftrightarrow 13\cdot\mathrm{a}+13\cdot\mathrm{c}+2\cdot\mathrm{b}-24\cdot\mathrm{c}=0\Rightarrow$ $13\cdot(a+c)=2\cdot(12c-b)\Rightarrow(a+c)\vdots 2\quad(3)$ Din $(1),(2),(3)\Rightarrow(a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c)\vdots 286,$ deoarece $(2,11,13)=1.$	2p 1p

	b) $x \cdot y = 2019 + y - 2 \cdot x \Leftrightarrow x \cdot y + 2 \cdot x = y + 2019 \Leftrightarrow$ $x \cdot (y+2) = y + 2019 \Rightarrow$ $x = \dfrac{y+2019}{y+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow (y+2)/(y+2019) \Rightarrow y+2/2017$ Se demonstrează că 2017 este număr prim; $\left.\begin{array}{l} y+2/2017 \\ 2017=\text{nr. prim} \end{array}\right\} \Rightarrow y+2=2017 \Rightarrow y=2015$ $y = 2015 \Rightarrow x = 2;$ Soluţia este $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2015 \end{cases}$	1p 1p 1p
3	a) Suma măsurilor unghiurilor $\measuredangle A_1OA_2, \measuredangle A_2OA_3, \measuredangle A_3OA_4, ..., \measuredangle A_{25}OA_{26}$, este egală cu $1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + ... + 25^\circ = 325^\circ \Rightarrow$ $m(\measuredangle A_1OA_{26}) = 360^\circ - 325^\circ = 35^\circ$.	2p 1p
	b) Din $[OM$ bisectoarea $\measuredangle A_2OA_6 \Rightarrow m(\measuredangle A_2OA_6) = 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + 5^\circ = 14^\circ \Rightarrow$ $m(\measuredangle A_2OM) = 7^\circ \Rightarrow m(\measuredangle A_1OM) = 8^\circ$.	2p
	$[ON$ bisectoarea $\measuredangle A_{11}OA_{14} \Rightarrow m(\measuredangle A_{11}OA_{14}) = 11^\circ + 12^\circ + 13^\circ = 36^\circ \Rightarrow$ $m(\measuredangle A_{11}ON) = 18^\circ = m(\measuredangle A_{14}ON)$; $m(\measuredangle NOM) = m(\measuredangle A_1OA_{14}) - m(\measuredangle A_1OM) - m(\measuredangle A_{14}ON) = 91^\circ - 8^\circ - 18^\circ = 65^\circ$.	1p 1p
4	a) $\triangle CBM \equiv \triangle CNA \overset{def}{\Rightarrow} \measuredangle MCB \equiv \measuredangle NCA$;	2p
	$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MCB \equiv \measuredangle NCA \\ \text{m}(\measuredangle MCN) = 60^\circ \\ \measuredangle ACB = \measuredangle \text{ alungit} \end{array}\right\} \Rightarrow m(\measuredangle MCB) = m(\measuredangle NCA) = 60^\circ$.	2p
	b)$\triangle CBM \equiv \triangle CNA \overset{def}{\Rightarrow} [CM] \equiv [CA]$; $\begin{cases} \triangle CMN \\ \triangle CAN \end{cases} : \begin{cases} [CN] \text{latură comună} \\ [CM] \equiv [CA] \\ m(\measuredangle MCN) = m(\measuredangle NCA) = 60^\circ \end{cases} \overset{L.UL}{\Rightarrow} \triangle CMN \equiv \triangle CAN \overset{def}{\Rightarrow}$	2p

	$\measuredangle CNM \equiv \measuredangle CNA \Rightarrow$ $[NC$ este bisectarea $\measuredangle$ANM.	1p