Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie 2017

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) $\sqrt{2\cdot n+2+2\cdot\sqrt{n\cdot(n+2)}}=\sqrt{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right)^2}=\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$	**2p**
	b) $\sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$ $\sqrt{8+2\cdot\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ $\sqrt{12+2\cdot\sqrt{35}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$ $S=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$	**1p** **1p**
	Prin raţionalizare obţinem : $S=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\ldots+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$ Avem $S=\frac{\sqrt{n+2}-1}{2}$. Dar cum $S=\frac{\sqrt{2019}-1}{2}$ obţinem $n+2=2019,$ de unde $n=2017$	**2p** **1p**

2.	**a)** $x^4+2\cdot x^3-x-2=x^3\cdot(x+2)-(x+2)=(x+2)\cdot(x^3-1)=$ $=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)$	**1p**
	$x^3+2\cdot x^2+2\cdot x+1=x^3+1+2\cdot x^2+2\cdot x=$ $=(x+1)\cdot(x^2-x+1)+2\cdot x\cdot(x+1)=(x+1)\cdot(x^2+x+1)$	**1p**
	$\frac{(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{(x+1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{(x+1)}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**1p**
	b) Ecuaţia este echivalentă cu $3^{[x]}\cdot\left(3^{[x]+[y]}-4\right)=3^3\cdot 77$ Cum $x>0\Rightarrow[x]\in\mathbb{N}\Rightarrow 3^{[x]}\in\mathbb{N}$ $y>0\Rightarrow[y]\in\mathbb{N}\Rightarrow 3^{[x]+[y]}\in\mathbb{N}$	**1p**
	Dacă $[x]+[y]=0$ ecuaţia nu are soluţii deoarece membrul stâng al ecuaţiei este număr negativ, iar membrul drept număr pozitiv. Dacă $[x]+[y]\neq 0\Rightarrow\left(3^{[x]+[y]}-4\right)$ nu este divizibil cu 3, iar ecuaţia este echivalentă Cu $\begin{cases}3^{[x]}=3^3\\3^{[x]+[y]}-4=77\end{cases}$ Obţinem $\begin{cases}[x]=3\\ [x]+[y]=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]=3\\ [y]=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[3,4)\\ y\in[1,2)\end{cases}$	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $a^3+b^3\geq a^2\cdot b+a\cdot b^2,\ \forall a,b>0$ $\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2\cdot b-a\cdot b^2\geq 0,\ \forall a,b>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2\cdot(a-b)+b^2\cdot(b-a)\geq 0,\ \forall a,b>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-b)\cdot(a^2-b^2)\geq 0,\ \forall a,b>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-b)\cdot(a-b)\cdot(a+b)\geq 0,\ \forall a,b>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-b)^2\cdot(a+b)\geq 0,\ \forall a,b>0$, inegalitate adevărată Egalitatea are loc pentru $a=b$.	**1p** **1p** **1p**

	b) $$\frac{1}{a^3+b^3+1}=\frac{1}{a^3+b^3+a\cdot b\cdot c}\le\frac{1}{a^2\cdot b+a\cdot b^2+a\cdot b\cdot c}=$$ $$=\frac{1}{a\cdot b(a+b+c)}=\frac{c}{a+b+c}\quad(1)$$ Analog, se demonstrează $\frac{1}{b^3+c^3+1}\le\frac{a}{a+b+c}\ (2)$ şi $$\frac{1}{a^3+c^3+1}\le\frac{b}{a+b+c}\ (3)$$ Prin însumarea inegalităţilor (1), (2), (3) obţinem inegalitatea cerută Egalitatea are loc pentru $a=b=c$.	**2p** **1p** **1p**
4.	**a)** Fie a lungimea muchiei cubului. Din M,N,P mijloacele muchiilor $[AB],[B'C']$, respectiv $[DD']$ obţinem $AM=MB=B'N=NC'=DP=PD'=\frac{a}{2}$ (1) $ABCDA'B'C'D'$ cub $\Rightarrow m(\sphericalangle MBC)=m(\sphericalangle CC'N)=m(\sphericalangle PDC)=90^\circ\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\triangle MBC,\triangle NC'C,\triangle PDC \text{ dreptunghice}\\ [MB]\equiv[NC']\equiv[PD]\ (1)\\ [BC]\equiv[CC']\equiv[CD]\end{array}\right.\overset{C.C}{\Rightarrow}\triangle MBC\equiv\triangle NC'C\equiv\triangle PDC\Rightarrow$ $[MC]\equiv[NC]\equiv[PC]$ (2)	**1p**

	$\left.\begin{array}{l}\triangle MBB', \triangle DAM, \triangle CBM, \triangle D'C'N \textit{ dreptunghice} \\ [BB'] \equiv [DA] \equiv [CB] \equiv [D'C'] \\ [MB] \equiv [AM] \equiv [MB] \equiv [C'N]\ (1)\end{array}\right\} \overset{C.C.}{\Rightarrow} \triangle MBB' \equiv \triangle DAM \equiv \triangle CBM \equiv \triangle D'C'N \Rightarrow$ $\Rightarrow [MB'] \equiv [DM] \equiv [CM] \equiv [D'N]\ (3)$ Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $\triangle DAM$ obţinem $DM^2 = DA^2 + AM^2 \Rightarrow DM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Utilizând relaţia $(3) \Rightarrow DM = CM = D'N = MB' = \frac{a\sqrt{5}}{2}\ (4)$ $ABCDA'B'C'D'$ cub implică $\left.\begin{array}{l}\triangle PDM, \triangle NB'M, \triangle PD'N \textit{ dreptunghice} \\ [PD] \equiv [NB'] \equiv [PD']\ (1) \\ [DM] \equiv [MB'] \equiv [D'N]\ (4)\end{array}\right\} \overset{C.C.}{\Rightarrow} \triangle PDM \equiv \triangle NB'M \equiv \triangle PD'N \Rightarrow$ $\Rightarrow [PM] \equiv [MN] \equiv [NP]\ (5) \Rightarrow \triangle MNP \textit{ echilateral}$ Din relaţiile $(2), (5) \Rightarrow CMNP$ piramidă triunghiulară regulată	**1p**
	b) Fie $CO \perp (MNP), O \in (MNP)$ Cum $CMNP$ este piramidă triunghiulară regulată rezultă că O reprezintă centrul de greutate al triunghiului $\triangle MNP$. $\left.\begin{array}{l}CO \perp (MNP) \\ MO \subset (MNP)\end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle(MC,(MNP))) = m(\sphericalangle(MC, MO)) = m(\sphericalangle CMO)$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}CO \perp (MNP) \\ MO \subset (MNP)\end{array}\right\} \Rightarrow CO \perp MO \Rightarrow m(\sphericalangle COM) = 90^\circ \Rightarrow \triangle COM \textit{ dreptunghic} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin \sphericalangle CMO = \frac{CO}{CM}\ (6)$	**1p**

Obţinem astfel $MO = \frac{2}{3} \cdot \frac{MN \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{MN \cdot \sqrt{3}}{3}$.

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PDM şi obţinem

$$MP^2 = PD^2 + DM^2 \Rightarrow MP^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Rightarrow MP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Folosind relaţia $(5) \Rightarrow PM = MN = NP = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow MO = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (7)

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic

$$\triangle COM \Rightarrow CO^2 = CM^2 - MO^2 \Rightarrow CO^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow CO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \ (8$$ **1p**

Din $(6),(4),(8) \Rightarrow \sin \sphericalangle CMO = \frac{CO}{CM} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

	c) Fie Q mijlocul segmentului $[MN]$. Cum $\triangle MNP$ este echilateral obţinem $PQ \perp MN$ $\left.\begin{array}{r}\triangle MCN\ isoscel\ (MC = CN) \Rightarrow CQ \perp MN \\ (MNP) \cap (MNC) = \{MN\} \\ PQ \perp MN\end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle((MNP),(MNC))) = m(\sphericalangle$ $PQ = h_{\triangle MNP} = \frac{MN \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}a}{4}\ (10)$ Cum $\triangle MNP$ este echilateral cu centrul de greutate O, iar $[PQ]$ mediană, rezultă că $O \in PQ \Rightarrow m(\sphericalangle CQP) = m(\sphericalangle CQO)$, iar $OQ = \frac{1}{3} \cdot PQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot a}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a\ (11)$ $\left.\begin{array}{l}CO \perp (MNP) \\ QO \subset (MNP)\end{array}\right\} \Rightarrow CO \perp QO \Rightarrow m(\sphericalangle COQ) = 90^\circ \Rightarrow \triangle COQ\ dreptunghic \Rightarrow$ $\sin \sphericalangle CQO = \frac{CO}{CQ}\ (12)$	1p
	Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic COQ şi obţinem $CO^2 = CQ^2 - OQ^2 \Rightarrow CO^2 = \frac{14 \cdot a^2}{16} - \frac{2 \cdot a^2}{16} \Rightarrow CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ (13)$ Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic CQM şi obţinem $CQ^2 = MC^2 - MQ^2 \Rightarrow CQ^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 \Rightarrow CQ = \frac{a\sqrt{14}}{4}\ (14)$ Din relaţiile $(12),(13),\ (14) \Rightarrow \sin(\measuredangle CQO) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{a\sqrt{14}} \Rightarrow \sin(\measuredangle CQO) = \sqrt{\frac{6}{7}}$.	**1p**